고전적 디리클레 문제

2003년 1학기 편미분방정식 보충교재

강현배

2003년 3월 3일

제 1 절　머리말

이 교재는 수리과학부 편미분방정식 (partial differential equations) 강좌의 보충교재이다. 이 교재에서는 현재 편미분방정식 분야에서 활발히 연구하고 있는 여러가지 관심사를 가장 기초적인 예를 가지고 설명함으로써, 편미분방정식을 처음으로 대하는 학생들이 이 분야에 대한 기초적인 이해를 갖게 하고, 또 주교재를 공부해 나가는 방향을 잡는데 도움이 되고자 한다.

이 보충교재에서 다룰 기초적인 예는 이른바 고전적 디리클레 문제 (classical Dirichlet problem) 이다. Ω를 2차원 혹은 3차원 공간에 있는 유계영역 (bounded domain) 이라 하고 $S = \partial\Omega$를 Ω의 경계라 하자. 이때 Ω에서의 Dirichlet 문제란 경계 S에 주어진 연속함수 f에 대하여 방정식

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } S \end{cases} \tag{1.1}$$

의 해 u를 구하는 문제를 말한다. 여기서

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{3차원; 2차원에서는 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$$

이고, 보통 라프라스 작용소 (Laplace operator)라 부른다. 이 문제는 안정상태에 있는 열의 분포에서 경계 S에서 온도를 알 때 내부 Ω의 온도분포를 알아내는 문제, 혹은 S에서 전압을 알 때 Ω의 전압분포를 알아내는 문제 등 여러가지 물리현상에서 나타나는 문제이다. 이 문제를 1차원에서 다시 나타내면: $\Omega = (a, b)$, $S = \{a, b\}$가 되고, 방정식은

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(a) = c_1,\ u(b) = c_2 \end{cases}$$

가 되고, 이것은 아주 쉬운 상미분방정식의 경계치문제 (boundary value problem for ordinary differential equations)이다.

문제 1 다음 미분방정식의 해를 구하시오.

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{in } (0, 1), \\ u(0) = 1,\ u(1) = 3. \end{cases}$$

문제 2 다음 편미분방정식의 해를 구하도록 시도하여 보시오. 또, Mathematica를 이용하여 해를 3 차원공간의 그래프로 그려보시오.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \\ u(x,0) = x,\ u(0,y) = y,\ u(x,1) = u(1,y) = 1, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

이 교재에서는 Dirichlet 문제에 대하여 다음 내용을 공부하고자 하며, 이 내용들은 편미분방정식 이론과 응용에서 중심이 되는 내용들이다.

- **방정식의 유도 (mathematical modelling)**: 자연현상이나 공학에서 나타난 현상을 수학문제로 바꾸는 작업을 말한다.
- **해의 존재성 (existence of solution)**: 주어진 방정식의 해가 존재하는가 하는 질문이다.
- **해의 유일성 (uniqueness of solution)**: 해가 있다면 단 하나만 있는가 하는 질문이다.
- **해의 안정성 (stability of solution)**: 해가 주어진 경계값 f에 어떻게 의존하는가 하는 질문이다.
- **해를 구하는 방법- 해석적 방법 (analytical methods)**: 해를 수식으로 구하는 방법을 말한다.
- **해를 구하는 방법- 수치적 방법 (numerical methods)**: 해를 콤퓨터를 이용하여 수치적으로 구하는 방법을 말한다.

위의 내용을 주로 영역 Ω가 사각형 모양일 때를 가지고 다루어 볼 것이다. 영역에 대한 이와같은 제한은 이 강좌의 수준 때문에 어쩔수 없는 것이지만, 이 교재를 통하여 편미분방정식에서 무엇이 문제가 되는가를 알게 된다면 이 교재는 그 임무를 다했다고 하겠다.

위의 내용에 덧붙여서 요즘 널리 쓰이고 있는 Mathematica를 이용하여 문제 (1.1)의 해를 구하고 또 그 그래프를 그려서 해의 성질에 대하여 알아볼 것이다.

제 2 절 방정식의 유도 (mathematical modelling)

이 절에서는 방정식 (1.1)이 어떤 자연현상에서 어떻게 유도되어지는가를 살펴볼 것이다. 일반적으로 자연현상 혹은 공학의 문제를 수학문제로 바꾸는 작업을 Mathematical Modelling이라 부르며, 최근에 들어 수학의 응용성이 강조되면서, 이 작업은 점점 더 중요해지고 있다. 특히 수학을 산업현장에 직접적으로 응용하기 위해서는 반드시 Mathematical Modelling을 거쳐야 한다는 것은 자명하다.

머리말에서 설명한대로 방정식 (1.1)은 안정상태에 있는 열의 분포를 표현하는 방정식으로, 여기서는 열전도(heat conduction)을 나타내는 방정식을 유도하고 이로 부터 방정식 (1.1)을 유도해 내겠다.

Ω를 3차원 유계영역이라 하자. $\vec{q}(\mathbf{x}, t)$를 공간의 점 $\mathbf{x}$와 시간 t에서의 열속벡터(heat flux vector: 단위면적당 단위시간당 열전도량과 방향을 나타내는 벡터)라 하자. 또 Ω가 예를 들어, 순도 100%의 구리등 균질의 물질로 이루어져 있다고 가정하자. 그러면 자연법칙에 의

해 열은 온도를 가장 빨리 떨어뜨리는 방향으로 전도되며, $u(\mathbf{x},t)$를 점 $\mathbf{x}$, 시간 t에서의 온도를 나타내는 함수라면,

$$\vec{q}(\mathbf{x},t) = -\kappa\nabla u(\mathbf{x},t) \tag{2.1}$$

라는 식을 만족한다. 여기서 κ는 열전도율(heat conductivity)라 불리는 상수이다. (Ω가 균질의 물질로 이루어지지 않았다 면, κ는 $\mathbf{x}$에 의존하는 함수가 된다.)

Ω에 들어가는 임의의 영역 V를 설정하고 그 경계를 ∂V라 하자. 그러면, V에서 생겨나는 열의 총량은 내부의 열원(heat source)에 의한 것과 경계 ∂V를 통하여 전도되는 열의 합이다. 열원을 함수 $g(\mathbf{x})$로 표시하면 (열원이 시간에 따라 변화하지 않는다고 가정), V에서 생겨나는 열의 총량은

$$\iiint_V g(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \iint_{\partial V} \vec{q}\cdot(-\vec{n})dS$$

가 된다. 여기서 $\vec{n}$은 표면 ∂V에 수직이고 V의 바깥 방향을 향하는 단위벡터이다. 식 (2.1)과 일반수학에서 배운 발산정리에 의하여

$$\iint_{\partial V} \vec{q}\cdot(-\vec{n})dS = \iint_{\partial V} \kappa\nabla u\cdot\vec{n}dS = \iiint_V \nabla\cdot(\kappa\nabla u)d\mathbf{x}.$$

따라서, V에서 생겨나는 열의 총량은

$$\iiint_V [g(\mathbf{x}) + \nabla\cdot(\kappa\nabla u)]d\mathbf{x}.$$

이 열이 V에서 온도변화를 일으키므로,

$$k\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = \iiint_V [g(\mathbf{x}) + \nabla\cdot(\kappa\nabla u)]d\mathbf{x}.$$

여기서 k는 물질의 밀도에 의존하는 상수이다. 다시쓰면,

$$\iiint_V \left[k\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) - g(\mathbf{x}) - \nabla\cdot(\kappa\nabla u)\right]d\mathbf{x} = 0.$$

이 식이 임의의 영역 V에서 성립하려면

$$k\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{x}) + \nabla\cdot(\kappa\nabla u) \qquad \text{(열방정식, Heat Equation).}$$

만약 열의 전도가 시간에 따라 변화하지 않는 안정상태(steady state)에 들어갔다면, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$이고

$$\nabla\cdot(\kappa\nabla u) = -g(\mathbf{x}) \qquad \text{(Poisson 방정식).}$$

또 내부 열원이 없었다면, $g = 0$이고,

$$\nabla\cdot(\kappa\nabla u) = \kappa\Delta u = 0.$$

지금까지 우리는 실험이나 관찰등을 통하여 발견된 자연법칙(Physical Law)로부터 방정식 (1.1)을 유도하였다. 한가지 유의해야 할점은 방정식 (1.1)이 열전도를 잘 표현하고 있지만 완전하게 표현하고 있는 것은 아니라는 점이다. 이 점에 대해서는 앞으로 다시 언급하게 될 것이다.

제 3 절 해의 존재성(Existence of Solutions)

이 절에서는 Dirichlet 문제 (1.1)의 해의 존재성에 대하여 이야기 한다. 미분방정식 (1.1)은 하나의 자연현상,즉 온도의 분포를 나타내는 것이며, 그 온도분포 자체가 미분방정식 (1.1)의 해이어야 한다. 이런 의미에서 해가 존재하는가 하는 질문 자체가 무의미한 것이 아닌가하는 의문을 가지는 것은 지극히 당연한 것이다. 그러면, 왜 해의 존재성이 문제가 되는가? 이 질문은 뒤에서 다시 다룰 해의 유일성, 안정성과도 관계가 있는 것으로, 미분방정식 (1.1)과 그것이 나타내고 있는 자연현상과의 차이에 기인한다. 뿐만 아니라, 경계 S에서 연속인 데이타 f에 대하여 $\overline{\Omega}$에서 연속인 해가 존재하는가하는 질문도 해의 존재성이 문제가 되는 한 이유가 된다.

이 교재에서는 사각형 영역 위에서는 6절에서 다루게 될 해석적인 방법으로 (1.1)의 해를 구할것이며 그것이 곧 해가 존재한다는 것도 함께 보여주는 것일 것이다.

하지만 인류가 알고 있는 해석적 방법으로 해를 구할 수 있는 방정식은 지극히 제한되어 있고, 일반적인 영역 혹은 일반적인 편미분방정식의 경우 해의 존재성, 유일성, 안정성 등은 아주 어려운 문제이며, 함수해석학등의 고등수학을 기본지식으로 가지고 있어야 다룰 수 있는 문제이다.

제 4 절 해의 유일성(Uniqueness of Solutions)

이 문제는 Dirichlet 문제 (1.1)의 해가 유일한가 하는 것이다. 즉, 주어진 경계치 f에 대하여 방정식 $\Delta u = 0$를 만족하는 u가 단 하나 밖에 없는가 하는 질문이다. 이 질문도 (1.1)의 해 u가 온도분포를 나타내는 것이고 온도분포는 하나밖에 없어야 하므로 당연히 해는 하나여야 한다고 생각할 수 있으며, 이러한 생각은 충분한 근거가 있다. 하지만, Dirichlet 문제 (1.1)은 열전도라는 자연현상을 완전하게 표현하고 있는 것이 아니며, 자연현상에서는 작용하는 여러가지 사소한 조건들이 무시되어 있는 문제이다. 그러므로, 자연현상에서는 단 하나인 온도분포가 수학문제로 변화되면서 2개 혹은 여러개의 해를 가지게 될런지 모른다. 실제로 해가 없는 미분방정식, 해가 무수히 많은 미분방정식이 있다. 이 때문에 해의 유일성 문제는 편미분방정식론에서 매우 중요한 부분을 차지하고 있다.

뿐만아니라, 해의 유일성은 응용의 면에서도 매우 중요한 의미가 있다. 예를 들어 여러개의 해를 갖는 방정식이 있고, 그 방정식의 해를 하나 구하였다고 할 때, 그 해가 과연 우리가 필요로 하는 해인가 하는 보장이 없다. 달을 향하였던 로켓이 우주공간을 헤매고 다닐 수가 있는 것이다.

이제 Dirichlet 문제 (1.1)의 해의 유일성의 문제를 수학적으로 따져보자. (1.1)의 해를 u_1, u_2라 두자. $u_1 = u_2$임을 보이면 (1.1)의 해가 유일함을 알 수 있다. 각각의 u_j는 다음식을 만족한다.

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_j = f & \text{on } S. \end{cases}$$

두 식을 빼고, $u = u_1 - u_2$ 라 두면

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } S. \end{cases} \tag{4.1}$$

이제 (4.1)을 만족하는 함수는 $u = 0$ 밖에 없음을 보이자.

조화함수의 성질. 함수 u가 Ω에서 $\Delta u = 0$를 만족할 때, u를 Ω에서 조화함수(harmonic function)이라 한다. 이 조화함수는 매우 특별한 성질을 가지며, 이 성질로 부터 우리는 (4.1)을

만족하는 함수는 $u = 0$ 밖에 없음을 알 수 있다.

문제 3 1 차원에서 조화함수를 모두 찾으시오.

보조정리 4.1 (조화함수의 평균값 성질) *영역 Ω에서 u가 조화함수이고 $B(x,r) \subset \Omega$ 이면*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + re^{i\theta}) d\theta. \tag{4.2}$$

여기서 $B(x,r) = \{y : |y - x| \le r\}$

보조정리 3.2를 증명하기 위해서는 다음의 정리가 필요하다.

보조정리 4.2 (Green 정리) *영역 D의 경계를 S라 하면 D에서 정의된 두번 미분가능한 함수 v, w에 대하여*

$$\int_D (u\Delta w - w\Delta u) dx = \int_S \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \tag{4.3}$$

증명 발산정리에 의하여

$$\begin{aligned}
\int_D u\Delta w dx &= \int_D u\nabla \cdot \nabla w dx \\
&= \int_D \nabla \cdot (u\nabla w) dx - \int_D \nabla u \cdot \nabla w dx \\
&= \int_S u\frac{\partial w}{\partial n} dS - \int_D \nabla u \cdot \nabla w dx.
\end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\int_D w\Delta u dx = \int_S w\frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_D \nabla u \cdot \nabla w dx.$$

위 두 식을 빼면, (4.3)를 얻는다.

보조정리 4.1의 증명 보조정리 4.2에서 $D = B(x,r) \setminus B(x,\epsilon)$, $v(y) = u(y)$, $w(y) = \log \frac{|y-x|}{r}$ 이라 잡으면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\Delta v = \Delta w = 0 \qquad \text{in } D, \\
&w(y) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial w}{\partial n}(y) = \frac{1}{r} \qquad \text{if } |y - x| = r, \\
&w(y) = \log\frac{\epsilon}{r} \quad \text{and} \quad \frac{\partial w}{\partial n}(y) = -\frac{1}{\epsilon} \qquad \text{if } |y - x| = \epsilon.
\end{aligned}$$

그러므로, (4.3)에 의하여,

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{|y-x|=\epsilon} u dS + \log\frac{\epsilon}{r}\int_{|y-x|=\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{r}\int_{|y-x|=r} u dS.$$

다시 쓰면,

$$\int_0^{2\pi} u(x + \epsilon e^{i\theta}) d\theta + \epsilon \log\frac{\epsilon}{r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}(x + \epsilon e^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} u(x + re^{i\theta}) d\theta.$$

이제 ϵ을 0으로 보내면 (3.2)를 얻는다. $\square$

문제 4 함수 f가 x에서 연속일때 다음을 증명하시오.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(x+\epsilon e^{i\theta})d\theta = 2\pi f(x).$$

문제 5

- 극좌표 (r,θ)를 이용하여,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

  임을 보이시오.

- 위의 식을 이용하여, D가 중심이 원점이고 반경이 R인 원판일 때 발산정리의 특별한 형태인 다음식을 증명하시오.

$$\int_D \Delta u dx = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} d\theta.$$

보조정리 4.3 (조화함수의 Maximum Principle) *함수 u는 영역 Ω에서 조화함수이다. u가 Ω의 내부점에서 최대값을 가지면 u는 상수함수이다.*

증명 $x_0 \in \Omega$를 u가 최대값을 갖는 점이라 하고 $B(x_0,r) \subset \Omega$라 하자. 그러면 (3.2)에 의하여,

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+\rho e^{i\theta})d\theta, \qquad \rho \le r.$$

$u(x_0)$가 최대값이므로 $B(x_0,r)$에 속하는 모든 x에 대하여, $u(x) = u(x_0)$. $A = \{\, x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\,\}$ 라 두면, u가 Ω에서 연속함수이므로 A는 닫힌 집합이고, 위 논의는 A가 열린 집합임을 보여준다. 따라서, $A = \Omega$, 즉 u는 Ω에서 상수함수이다. $\square$

이제 Dirichlet문제 (1.1)의 해의 유일성 문제로 돌아가자. (4.1)은 u가 Ω에서 조화함수이고 경계에서 0임을 나타내고 있다. 조화함수의 Maximum Principle에 의하여 u의 최대값은 경계에서 발생하므로 $u \le 0$. 또 $-u$도 Ω에서 조화함수이므로 같은 이유에서 $-u \le 0$이다. 즉 Ω에서 $u \equiv 0$이다.

제 5 절 해의 안정성 (Stability of Solutions)

이제 해의 안정성 문제를 다루어 보자. 이 문제는 기본적으로 경계값 f가 조금 변하면 그에 따른 해 u도 조금 변하는가 하는 문제이다. 이 문제도 수학적으로 뿐만 아니라 현실적으로도 매우 중요한 문제이다. 예를 들어 Dirichlet문제 (1.1)을 생각해 보자. 경계에서 온도(f)를 측정하여 내부의 온도를 알려고 하는 것이다. 하지만 지구상의 어떤 계기도 온도를 정확히 측정할수 없고 항상 오차를 가지고 있다. 만약 (1.1)이 안정적이지 않다면 (이런 경우 문제가 ill-posed 되었다고 한다) 그 측정치를 가지고 구한 해 u는 구하고자 했던 온도 분포와는 전혀 다른 것일 수 있다. 실제로 안정되어있지 못한 문제는 많이 있으며 기상관측 등에서 자주 등장하는 Chaos가 그 좋은 예이다.

이 교재에서 다루는 문제 (1.1)은 안정적이며 Maximum Principle로부터 쉽게 알수 있다. 즉, 경계값 f_1과 f_2에 대응하는 해를 각각 u_1, u_2라 하면 u_1-u_2는 Ω에서 조화함수이고 경계값 f_1-f_2를 갖는다. Maximum Principle에 의하여 $\max_S |f_1-f_2|$ 가 작으면 $\max_\Omega |u_1-u_2|$도 작다.

제 6 절 해를 구하는 방법- 해석적 방법

이절에서는 Dirichlet문제 (1.1)의 해를 해석적 방법으로 구하는 한 방법을 공부한다. 이 절에서부터 주어진 영역 Ω는 사각형 영역, 즉 $\Omega = \{ (x,y) : 0 < x < a,\, 0 < y < b \}$ 이다. 우리의 Dirichlet문제를 다시 표현하자면,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b; \\ u(x,0) = f_1(x),\, u(x,b) = f_2(x), \quad 0 < x < a; \\ u(0,y) = g_1(y),\, u(a,y) = g_2(y), \quad 0 < y < b. \end{cases} \tag{6.1}$$

우리는 이 문제를 이른바 변수분리 (separation of variables) 방법을 이용하여 푼다. 먼저 문제 (6.1)를 다음의 두 문제로 분리하자.

$$\begin{cases} (D1.1)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b; \\ (D1.2)\ u(x,0) = f_1(x),\, u(x,b) = f_2(x), \quad 0 < x < a; \\ (D1.3)\ u(0,y) = 0,\, u(a,y) = 0, \quad 0 < y < b. \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\begin{cases} (D2.1)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b; \\ (D2.2)\ u(x,0) = 0,\, u(x,b) = 0, \quad 0 < x < a; \\ (D2.3)\ u(0,y) = g_1(y),\, u(a,y) = g_2(y), \quad 0 < y < b. \end{cases} \tag{6.3}$$

문제 (6.2)과 (6.3)의 해를 더하면 문제 (6.1)의 해를 얻는다. 먼저 방정식 (6.2)을 풀기로 하자. 변수분리 방법이란, $u(x,y) = X(x)Y(y)$ 형태의 해를 구하는 것을 말한다. $u(x,y)$가 이러한 형태라면 방정식 (D1.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

다시 쓰자면,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}. \tag{6.4}$$

항등식 (6.4)가 모든 x, y에 대하여 성립하려면 양변이 모두 상수이어야 한다. 즉,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2\ (\lambda > 0). \tag{6.5}$$

한가지 눈여겨 보아야 할 것은 $-\lambda^2$는 음수라는 것이다. 이렇게 음수가 되어야 하는 이유는 다음 경계치 문제 (보통 eigenvalue problem이라 불린다)의 해의 존재성 때문이다. 식 (6.5)의 첫번째 등식과 경계조건 (D1.3)에 의하여 다음 2계 상미분방정식의 경계치 문제를 얻는다.

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < a; \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

문제 (6.6)이 해를 가질려면 $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$ 이어야 하고, 이때 (6.6)의 해는 $X_n(x) = \sin(\lambda_n x)$의 상수배이다.

문제 6 바로 위 문장을 증명하시오.

$\lambda = \lambda_n$일 때, 방정식 (6.5)의 두번째 식인 $Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$ 의 해는 $Y_n(y) = \alpha_n \cosh(\lambda_n y) + \beta_n \sinh(\lambda_n y)$ 이다. 따라서, $X_n(x)Y_n(y)$는 방정식 (D1.1)의 해가 되고, 문제 (6.2)의 해를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cosh(\lambda_n y) + \beta_n \sinh(\lambda_n y)] \sin(\lambda_n x).$$

이 해는 이미 경계조건 (D1.3)를 만족하고 있으며, 이제 남은 문제는 (D1.2)를 만족하도록 계수 α_n과 β_n을 결정하는 것이다. 계수 α_n과 β_n은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\lambda_n x) = f_1(x) \\ u(x,b) &= \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cosh(\lambda_n b) + \beta_n \sinh(\lambda_n b)] \sin(\lambda_n x) = f_2(x). \end{aligned}$$

이제 문제는 sin급수로 모든 연속함수를 표현할 수 있는가 하는 것, 다시 말하자면 system $\{\sin(\lambda_n x)\}$가 complete한가 하는 것이다. 이것은 해석학 시간에 배운 내용으로, 사실이다. 위 식에서 α_n과 β_n을 결정하면

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{a} \int_0^a f_1(x) \sin(\lambda_n x) dx \\ \beta_n &= \frac{1}{\sinh(\lambda_n b)} \left[\frac{2}{a} \int_0^a f_2(x) \sin(\lambda_n x) dx - \alpha_n \cosh(\lambda_n b) \right]. \end{aligned}$$

똑 같은 방법으로 (6.3)을 풀면,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cosh(\mu_n x) + B_n \sinh(\mu_n x)] \sin(\mu_n y), \qquad \mu_n = \frac{n\pi}{b}$$

이고,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b} \int_0^b g_1(y) \sin(\mu_n y) dy \\ B_n &= \frac{1}{\sinh(\mu_n a)} \left[\frac{2}{b} \int_0^b g_2(y) \sin(\mu_n y) dy - A_n \cosh(\mu_n a) \right]. \end{aligned}$$

문제 7 이 절에서 배운 방법으로 문제 2 를 푸시오.

제 7 절 해의 수치적 계산

이제 Dirichlet문제를 수치적으로 푸는 한 방법을 공부하기로 하자. 미분방정식을 수치적으로 푼다는 것은 미분방정식을 대수방정식으로 바꾸고 그 방정식을 푼다는 것을 의미한다.

이 방법은 미분을 대수식으로 바꾸는 과정에서 필연적으로 오차를 수반하며, 따라서 수치적 방법으로 방정식을 푸는 것은 해의 근사값이지 정확한 해는 아니다. 하지만, 대부분의 방정식이 해석적 방법으로 풀리지 않으므로, 미분방정식을 현실문제에 응용하기 위해서는 수치적 방법의 이해가 필수적이다.

이 절에서는 문제 (1.1)의 해를 이른바 finite difference method (FDM)을 이용하여 수치적으로 계산하는 방법을 공부한다. 5절에서와 마찬가지로 이절에서도 $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < a,\, 0 < y < b\}$ 라 하자. 미분방정식을 대수방정식으로 바꾸기 위해서는 연속변수 (x,y)에 대하여 정의되는 함수를 격자점에서 정의된 함수로 대표하여야 한다. 즉 사각형 Ω를 다음과 같이 격자점으로 대표시키자.

즉, Ω를 x축 방향으로 m등분하고 y축 방향으로 n등분하여 생기는 격자점을 (x_i, y_j) $(0 \le i \le m, 0 \le j \le n)$이라 하자. $f(x,y)$가 Ω에서 정의된 함수일 때 $f(x_i,y_j) = f_{i,j}$라 두자. 문제 (1.1)을 대수방정식으로 바꾸기 위해서는 미분 u_{xx}와 u_{yy}의 (x_i,y_j)에서 값을 표현해 주어야 한다. 이를 위하여 잠시 일변수 함수에 대하여 살펴보자.

$g(x)$가 일변수함수라 하자. 그러면 Taylor정리에 의하여,

$$g(x+h) \approx g(x) + g'(x)h + g''(x)\frac{h^2}{2}.$$

위 식에 h 대신 $-h$를 대입해도 식이 성립하며, 두 식을 더하면,

$$g(x+h) - 2g(x) + g(x-h) \approx g''(x)\frac{h^2}{2}.$$

이 논의에서 우리는 다음을 알수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j) &\approx \frac{u(x_{i+1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i-1},y_j)}{h^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j) &\approx \frac{u(x_i,y_{j+1}) - 2u(x_i,y_j) + u(x_i,y_{j-1})}{h^2}.
\end{aligned}$$

그러므로 $u_{xx}(x_i,y_j)$는 $[u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}]/h^2$ 으로 대표할 수 있고, $u_{yy}(x_i,y_j)$는 $[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}]/h^2$로 대표할 수 있다. 이제 방정식 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 는

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0, \quad 0 \le i,j \le n-1 \tag{7.1}$$

로 바뀌며, 경계조건 $u(x,y) = f(x,y)$ $((x,y) \in \partial\Omega)$ 는

$$u_{i,j} = f_{i,j} \quad \text{if } i = 0 \text{ or } m, \quad j = 0 \text{ or } n. \tag{7.2}$$

여기서, 사각형의 네 꼭지점의 값 즉, $f_{0,0}, f_{0,n}, f_{m,0}, f_{m,n}$은 무시한다. 방정식 (7.1), (7.2)가 풀어야 할 대수방정식이다.

문제 8 문제 0.2의 해를 $m = n = 4$로 하여 수치적으로 계산하시오.

제 8 절 해의 예

이 절에서는 6절에서 배운 해석적 방법을 Mathenatica를 이용하여 구현한 한 예를 살펴본

다. 예로서 다룰 Dirichlet 문제는

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ u(x,0) = x,\ u(x,2) = 2 + x, \quad 0 < x < 1; \\ u(0,y) = y,\ u(1,y) = 1 + y, \quad 0 < y < 2 \end{cases}$$

이고, 해를 처음 8항의 Fourier sine 급수로 표현하였다. 처음 Graph는 (6.2)의 해를 두번째 Graph는 (6.3)의 해를, 마지막 Graph는 주어진 문제의 해를 각각 나타내고 있다.