1. $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,, \sqrt{\frac{3}{2}}\,, 1\right)$

2. $4x+2y-z=3$

3. $10(x+y)^9+10(x-y)^9+1$

4. $\sqrt{3}\,e^{10}$

5. 안장점

6. 2

7. $\frac{32\sqrt{2}}{15}$

8. $\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})$

9. $A=2, \quad B=\frac{x}{2}$

10. $\frac{32\pi}{3}$

11. 주면 $x^2+y^2=1$과 평면 $2x+y-z=4$의 교선인 타원의 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 구하시오.

풀이) $g(x,y,z)=2x+y-z-4=0$ 과

$h(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$ 을 조건으로 하는

$f(x,y,z)=z$의 최대값과 최소값을 구해야 한다.

Lagrange 승수법을 사용

$$g(x,y,z)=2x+y-z-4=0$$
$$h(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$$
$$0=2\lambda+2x\mu$$
$$0=\lambda+2y\mu$$
$$1=-\lambda$$

가장 높은 점 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}-4\right)$

가장 낮은 점 $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5}-4\right)$

12. 함수 $z=f(x,y)$가 연속인 이차 편도함수를 가지고 $x=r^2+s^2$, $y=2rs$ 일 때 $\frac{\partial z}{\partial r}$와 $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$를 구하시오.

풀이) 연쇄율에 의해서

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}(2r)+\frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

여기에 곱의 법칙을 적용하면

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x}+2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2\frac{\partial z}{\partial x}+2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$ 이다.

연쇄율을 다시 이용하면

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r)+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(2s)$$ 이고

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2r)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$ 이다.

그러므로

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=2\frac{\partial z}{\partial x}+4r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+4s^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+4rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4rs\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

13. 평면 $z=2$와 $z=6$ 사이에 놓인 추면 $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ 의 넓이를 구하시오.

풀이) 주면좌표 $z=g(r,\theta)=2r$ 를 이용하면

넓이는

$$\int\int \sqrt{r^2+(rg_r)^2+(g_\theta)^2}\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^3 \sqrt{r^2+(2r)^2}\,drd\theta = 8\pi\sqrt{5}$$

14. 원기둥 $x^2+y^2=1$과 $x^2+z^2=1$의 공통 내부이면서 제1팔분원에 있는 영역 T의부피를 3중적분을 이용하여 구하시오.

풀이)

부피=$\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\,dy\,dx = \frac{2}{3}$

15. 구면 $\rho=\cos\phi$와 반구 $\rho=2,\ z\geq 0$ 사이의 입체 T의 부피를 구하시오.

풀이)

구면좌표를 이용하면 부피는

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos\phi}^2 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{31\pi}{6}$$