2009년도 1학기 중간고사 답안

객관식

1. $-1 \le x < 1$ 또 다른 표현으로 $[-1,1)$

2. 1

3. $P(3,3)$과 $P(\frac{11}{9},\frac{37}{27})$

4. $-\frac{1}{2}$

5. $y = x - \frac{\pi}{6}$ 또 다른 표현으로 $x - y - \frac{\pi}{6} = 0$

6. $3\frac{1}{27} = \frac{82}{27}$

7. $\frac{\ln 2}{2} = \ln\sqrt{2}$

8. $\frac{14}{3}$

9. $\frac{\pi}{4}$

10. $\frac{5}{2}\pi$

주관식 답안

11. 원점 O와 곡선 $f(x)=e^{-x^2}$ 위의 한 동점 P를 서로 대각선으로 마주보는 꼭지점으로 갖는 직사각형이 제 1사분면에 있다. 이 때 이 직사각형의 최대 넓이를 구하여라.

[답안] 직사각형의 넓이가 $A(x)=xe^{-x^2}$ $(x>0)$이므로 이 함수의 최대값을 구하면 된다.[2점]

먼저 도함수가 $A^{'}(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$이므로, 임계점은 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다. [5점]

$0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이면 $A^{'}(x)>0$ 즉 A는 증가함수이다.

$x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이면 $A^{'}(x)<0$ 즉 A는 감소함수이다. 따라서 A는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 극대값이면서 동시에 최대값을 가진다. [8점]

그러므로 직사각형의 최대값은 $A(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$이다. [10점]

12. 곡선 $y=x^3$ 와 $x=1$, x-축으로 둘러싸인 영역을 x-축을 중심으로 회전시킨 회전체의 겉넓이를 구하여라.

[답안] 이 회전체의 겉넓이 $A=A_1+A_2$는 두 부분으로 이루어져 있다. 여기서 A_1는 곡선 $y=f(x)=x^3$을 x-축을 중심으로 회전시켜 생긴 회전곡면의 겉넓이이다. A_2는 x-축에 수직인 겉면으로 반지름이 1인 원판의 넓이로서 $A_2=\pi$이다.[3점]

이제 회전곡면의 공식에 의해 A_1을 구하면 다음과 같다.

$$A_1=\int_0^1 2\pi f(x)\sqrt{1+(f^{'}(x))^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx \quad (f^{'}(x)=3x^2) \text{ [7점]}$$

($u=9x^4+1$으로 치환하면)

$$=\frac{\pi}{18}\int_1^{10}\sqrt{u}\,du=\frac{\pi}{27}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{10}=\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

따라서 $A=A_1+A_2==\dfrac{\pi}{27}(10\sqrt{10}+26)$. [10점]

13. 함수 $F(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_0^x\left(\int_1^{\sin t}\sqrt{1-u^2}\,du\right)dt$ 로 정의할 때, $F(x)$를 먼저 구하고 난 후 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}F(x)dx$를 구하여라.

[답안] 주어진 함수 $F(x)$를 구하기 위해 미적분학의 기본정리와 연쇄법칙을 적용하면

$F(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{\sin x}\sqrt{1-u^2}\,du$이다.

$=\sqrt{1-\sin^2 x}\,cosx$ 이다. [5점]

이제 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}F(x)dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 x}\,cosxdx$ 을 다음의 두가지 방법으로 구할 수 있다.

(a) 치환적분: $u=\sin x$으로 두면 $du=\cos x dx$이다.

따라서 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}F(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du$ [7점]

=반지름이 1인 4분원의 넓이 [9점]

$=\dfrac{\pi}{4}$ 이다.[10점]

(b) 피적분함수를 변형:

$$\int_0^{\pi/2}F(x)dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 x}\,cosxdx$$

$=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^2 x dx$ ($\because$ $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$ ($[0,\frac{\pi}{2}]$에서 $\cos x>0$) [7점]

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$ ($\because$ 이배각 공식 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$)[9점]

$=\dfrac{\pi}{4}$ 이다. [10점]

14. 반지름이 2인 두 개의 구 A와 B를 두 구의 중심사이의 거리가 2가 되도록 놓았을 때, 구 A의 외부와 구 B의 내부로 이루어진 입체의 부피를 구하여라.

[답안] 주어진 입체를 $x-y$평면위의 영역을 x-축으로 회전시겨 얻은 것으로 바꾸어서 부피를 구하면 된다. 먼저 두 원

$C_A:(x+1)^2+y^2=2^2$ 와 $C_B:(x-1)^2+y^2=2^2$는 중심사이의 거리가 2이므로 C_A의 외부와 C_B의 내부로 둘러싸인 제 1사분면의 영역을 x축으로 회전해서 생긴 입체의 부피가

바로 문제에서 구하는 입체의 부피이다.[3점](여기서 두 원의 중심을 다르게 잡을 수 있음)

따라서 이 입체의 부피 V는 $V=\int_0^1 \pi(r_2^2-r_1^2)dx+\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 2^3$ 여기서 r_2는 단면인 원환의 바깥 반지름이고 r_1는 단면인 원환의 안쪽 반지름이다. 그리고 $\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 2^3$ 는 반지름이 2인 반구의 부피이다. 이제

$r_2^2-r_1^2=4-(x-1)^2-(4-(x+1)^2)=4x$이므로

$$V=\int_0^1 \pi 4x dx+\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 2^3 \ [7점]$$

$$=2\pi+\frac{16}{3}\pi=\frac{22}{3}\pi$$이다. [10점]

또 다른 방법으로 대칭성을 이용하여

$$V=\frac{32}{3}\pi-2\int_{-1}^0 \pi(4-(x-1)^2)dx \ [7]$$

$$=\frac{32}{3}\pi-2\int_{-1}^0 \pi(-x^2+2x+3)dx=\frac{32}{3}\pi-\frac{10}{3}\pi=\frac{22}{3}\pi \ [10점]$$

15. 함수 $f(x)=(x\ln x)^2+x^2 \ (x>0)$ 그래프의 개형을 그려라. 그리고 이 곡선의 $x-$절편, $y-$절편, 극대점, 극소점, 변곡점, 점근선이 있으면 정확하게 표시하여라.

[답안] $f'(x)=2x\ln x(1+\ln x)+2x$
$=2x\{(\ln x)^2+\ln x+1\}$

1차도함수가 항상 0보다 크므로 주어진 함수 $f(x)$는 증가함수이다.[3점]

2차도함수를 구하면

$$f''(x)=2\{(\ln x)^2+3\ln x+2\}$$
$$=2(\ln x+1)(\ln x+2)$$

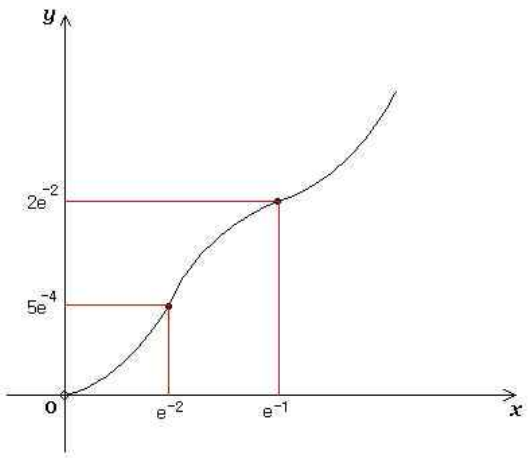
이고 $f''(x)=0$ 로부터 $x=e^{-2}$ 와 $x=e^{-1}$이다. [5점]

이제 2차도함수의 부호를 조사하면,

$0<x<e^{-2}$; $f''(x)>0$
$e^{-2}<x<e^{-1}$; $f''(x)<0$
$x>e^{-1}$; $f''(x)>0$

변곡점 : $(e^{-2},5e^{-4})$, $(e^{-1},2e^{-2})$ [7점]

또한 $\lim_{x\to 0^+}\{(x\ln x)^2+x^2\}=0$이다.(**이 부분에 대한 계산은 없어도 되지만 그래프 위에 그려져 있으면 -1점 감점**) 위 내용을 종합하여 그래프를 그려보면, [10점]



y
2e^{-2}
5e^{-4}
O
e^{-2}
e^{-1}
x