2009학년도 2학기 (중간고사)		학 과		감독교수확인	
과 목 명	일반수학2	학년,학번			
출제교수명	공 동	분반,교수명			
시 험 일 시	2009.10.19.월요일 (오전 10:00~11:40)	성 명		점 수	

1번~10번의 문제는 단답형으로 각 문제당 배점은 5점이며 부분점수가 없다. 주어진 상자 안에 답만 쓸 것.

1. 곡선 $r = 1 + \sin\theta$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때의 접선의 기울기를 구하여라.

답:

2. 곡선 $r = \frac{2}{\cos\theta}$, $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{3})$의 길이를 구하여라.

답:

3. 공간상의 한 점 $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3})$ 을 주면좌표와 구면좌표로 나타내시오.

답:

4. 점 $P(1,-1)$에서 다음 함수의 $\vec{v}$-방향도함수를 구하여라.

$$f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right), \quad \vec{v} = <-1, 1>$$

답:

5. 다음 식으로 주어진 곡면의 점 $P(\pi, 1, e)$에서의 접평면의 방정식을 구하여라.

$$\cos(xy) + \ln(yz) = 0$$

답:

6. 원점과 극좌표로 표현된 두 점 $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$와 $(2, -\frac{\pi}{3})$을 세 꼭지점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

답:

7. 점 $P(2,1,-1)$ 을 지나고 두 평면 $2x+y-z=3$, $x+2y+z=2$ 의 교선에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

답:

8. 함수 $z(x,y)$는 $z=\sqrt{uvxy}$로 주어진다. 여기서 $u(x,y)$, $v(x,y)$는 $u(1,1)=v(1,1)=1$ 와 $u_y(1,1)=1, v_y(1,1)=-1$을 만족할 때 $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$을 구하여라.

답:

9. 함수 $z=f(x,y)$가 $x^3+y^3+z^3+xz=0$을 만족할 때 $\nabla f(1,1)$을 구하여라.

답:

10. xy평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $P(1,4)$, $Q(3,1)$으로 만들어지는 삼각형을 공간에서 벡터 $\vec{a}=<1,1,1>$의 방향으로 $\vec{a}$의 크기만큼 이동하였을 때 생겨나는 입체의 부피를 구하여라.

답:

2009학년도 2학기 (중간고사)		학 과		감독교수확인
과 목 명	일반수학2	학년,학번		
출제교수명	공 동	분반,교수명		
시 험 일 시	2009.10.19.월요일 (오전 10:00~11:40)	성 명		점 수

11번~15번의 문제는 서술형으로 각 문제당 배점은 10점이다. 풀이과정을 쓸 것.

11. 세 개의 원 $r=1$, $r=2\cos\theta$와 $r=2\sin\theta$ 모두의 내부로 이루어진 영역의 넓이를 구하여라.

12. 함수 $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,에서 f는 두 번 미분가능하고, 또한 f_{xy}, f_{yx}는 연속이다.

1) $(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=(\frac{\partial f}{\partial r})^2+a(r,\theta)(\frac{\partial f}{\partial \theta})^2$ 을 만족하는 $a(r,\theta)$을 구하여라.

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=b(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+c(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+d(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 을 만족하는 $b(r,\theta)$, $c(r,\theta)$, $d(r,\theta)$을 각각 구하여라.

13. 두 점 $A(a, b, 1)$와 $B(-1, a, b)$이 곡면 $x^4+2y^4+3z^4=6$ 위의 점 $C(1,1,1)$에서의 접평면 위에 있을 때 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

14. 두 직선 $L_1 : x-1=\frac{y+2}{3}=-(z-4)$와 $L_2 : \frac{x}{2}=y-3=\frac{z+3}{4}$ 사이의 거리를 구하여라.

2009학년도 2학기 (중간고사)		학 과		감독교수확인	
과 목 명	일반수학2	학년,학번			
출제교수명	공 동	분반,교수명			
시 험 일 시	2009.10.19.월요일 (오전 10:00~11:40)	성 명		점 수	

15. 함수 $f(x,y)$는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-2y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

이 때 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$을 각각 구하여라.

2009/2. 일수 2. 중간기출풀이

1. 접선 기울기 = $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \left.\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \left.\frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos^2\theta + (1+\sin\theta)(-\sin\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$

$= -1$

$\begin{pmatrix} x = r\cos\theta = (1+\sin\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (1+\sin\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$

2. 곡선의 길이 $S = \int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$

$\left(r = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4\sec^2\theta + (2\sec\theta\tan\theta)^2}\, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sec^2\theta\, d\theta = 2\left[\tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$

3. 직교 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}\right)$ → 주면 $(r, \theta, z) \underset{①}{=} \boxed{\left(1, \frac{3}{4}\pi, \sqrt{3}\right)}$

→ 구면 $(\rho, \phi, \theta) \underset{②}{=} \boxed{\left(2, \frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\pi\right)}$

① $r^2 = x^2 + y^2 = 1$.
$r = \pm 1$
$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$.
$\theta = \frac{3}{4}\pi$ (∵ 2사분면)

② $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 4$. ∴ $\rho = 2$
$z = \rho\cos\phi$
⇒ $\sqrt{3} = 2\cos\phi$ ∴ $\phi = \frac{\pi}{6}$

4. $D_{\vec{u}} f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot \vec{u}$

$= \langle f_x(1,-1), f_y(1,-1) \rangle \cdot \vec{u}$

$= \left.\left\langle \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}, \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \right\rangle\right|_{(1,-1)} \cdot \frac{\langle -1, 1 \rangle}{\sqrt{2}}$

$= \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 1 \rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{0}$

5. $F(x,y,z) \overset{let}{=} \cos(xy) + \ln(yz) = 0$.

접평면은

$\underbrace{F_x(P)}_{\substack{\| \\ -y\sin(xy)|_P \\ \| \\ 0}} (x-\pi) + \underbrace{F_y(P)}_{\substack{\| \\ -x\sin(xy) + \frac{z}{yz}|_P \\ \| \\ 1}} (y-1) + \underbrace{F_z(P)}_{\substack{\| \\ \frac{y}{yz}|_P \\ \| \\ \frac{1}{e}}} (z-e) = 0$

⇒ $(y-1) + \frac{1}{e}(z-e) = 0$

⇒ $\boxed{y + \frac{1}{e}z = 2}$

6. $A\left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ⟹ 직교로 $A(-1,-1) = (-1,-1,0)$

$B\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ ⟹ 〃 $B(1, -\sqrt{3}) = (1, -\sqrt{3}, 0)$

삼각형넓이 $= \triangle OAB = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left| 0\vec{i} - 0\vec{j} + (\sqrt{3}+1)\vec{k} \right|$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$

7. 평면의 법선 vector $\underset{\uparrow}{=}$ 교선의 방향 vector $= \langle 2, 1, -1\rangle \times \langle 1, 2, 1\rangle$

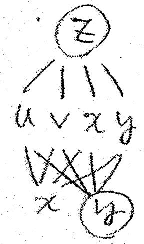
(문제에서, 평면 ⊥ 교선) $= 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

$\Rightarrow$ 평면 ; $3(x-2) - 3(y-1) + 3(z+1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{x - y + z = 0}$

8. $z = \sqrt{uvxy}$

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ x = x \\ y = y \end{cases}$$



$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y + z_x \cdot x_y + z_y \cdot y_y$$

$$= \frac{vxy}{2\sqrt{uvxy}} \cdot u_y + \frac{uxy}{2\sqrt{\ }} \cdot v_y + \frac{uvy}{2\sqrt{\ }} \cdot 0 + \frac{uvx}{2\sqrt{\ }} \cdot 1$$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

($x=1$, $y=1$, $u(1,1) = v(1,1) = 1$, $u_y(1,1) = 1$, $v_y(1,1) = -1$ 대입)

9. $z = f(x, y) \Rightarrow \nabla f(1,1) = \langle f_x(1,1), f_y(1,1)\rangle$

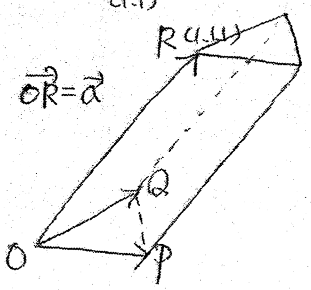
$F(x, y, z) \overset{let}{=} x^3 + y^3 + z^3 + xz = 0$

$$f_x\Big|_{(1,1)} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \underset{\uparrow}{=} -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + z}{3z^2 + x}\Bigg|_{(1,1,-1)} = -\frac{1}{2}$$

$x=1$, $y=1$ 일 때 z를 계산하면 $z = -1$

음함수 편미분

$$f_y\Big|_{(1,1)} = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2}{3z^2 + x}\Bigg|_{(1,1,-1)} = -\frac{3}{4} \quad \therefore \left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right\rangle$$

10. 

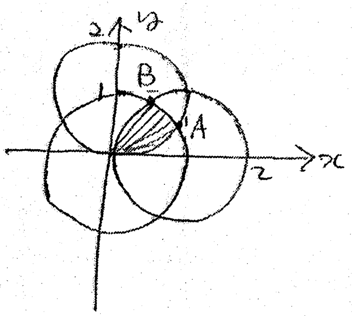
부피 $= \frac{1}{2}$ 평행6면체 부피

$= \frac{1}{2} \left| \vec{OP} \cdot \vec{OQ} \times \vec{OR} \right|$

$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 1(1-0) - 4(3-0) + 0(3-1) \right|$

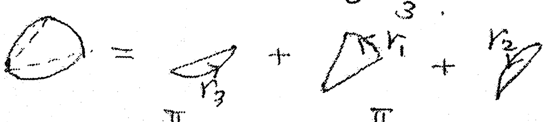
$= \frac{11}{2}$

11. $r_1 = 1$, $r_2 = 2\cos\theta$, $r_3 = 2\sin\theta$



A ; r_1과 r_3의 교점 $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

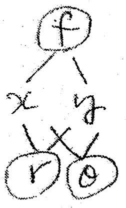
B ; r_1과 r_2 〃 $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} r_3^2 \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} r_1^2 \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r_2^2 \, d\theta$$

$$= \boxed{\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

12. $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

1) 

주의; f_x, f_y 에는 연쇄법칙 적용 불가

(∵ 이문제에서는 f는 x, y에 대해서 합성함수가 아님.)

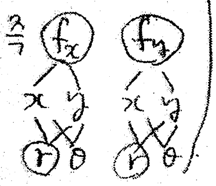
$$\begin{cases} f_r = f_x \cdot x_r + f_y \cdot y_r = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta \\ f_\theta = f_x \cdot x_\theta + f_y \cdot y_\theta = f_x(-r\sin\theta) + f_y \cdot r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f_r)^2 = f_x^2\cos^2\theta + f_y^2\sin^2\theta + 2f_x f_y \sin\theta\cos\theta \\ \left(\frac{f_\theta}{r}\right)^2 = f_x^2\sin^2\theta + f_y^2\cos^2\theta - 2 \quad '' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f_r)^2 + \frac{1}{r^2}(f_\theta)^2 = f_x^2 + f_y^2 \quad \Rightarrow \quad a(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$$

2) $$f_{rr} = (f_r)_r = (f_x \cdot x_r + f_y \cdot y_r)_r \overset{\text{합의 미분}}{=} (f_x \cdot x_r)_r + (f_y \cdot y_r)_r$$

$$\overset{\text{곱의미분}}{=} (f_{xr} \cdot x_r + f_x \cdot x_{rr}) + (f_{yr} \cdot y_r + f_y \cdot y_{rr})$$

(f_x, f_y는 다시 x, y의 함수: 즉 )

$$= (f_{xx} \cdot x_r + f_{xy} \cdot y_r) \cdot \cos\theta + f_x \cdot 0 + (f_{yx} \cdot x_r + f_{yy} \cdot y_r) \cdot \sin\theta + f_y \cdot 0$$

$$= (f_{xx}\cos\theta + f_{xy}\sin\theta)\cos\theta + (f_{yx}\cos\theta + f_{yy}\sin\theta)\sin\theta$$

$$= \underbrace{\cos^2\theta}_{\therefore\, b(r,\theta)} \cdot f_{xx} + \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{\therefore\, c(r,\theta)} \cdot f_{xy} + \underbrace{\sin^2\theta}_{\therefore\, d(r,\theta)} \cdot f_{yy}$$

13. 기존풀이 참조.

14. 두 직선 L_1, L_2는 꼬인 위치

∵ ① L_1의 방향 Vector $\vec{a} = \langle 1, 3, -1 \rangle$

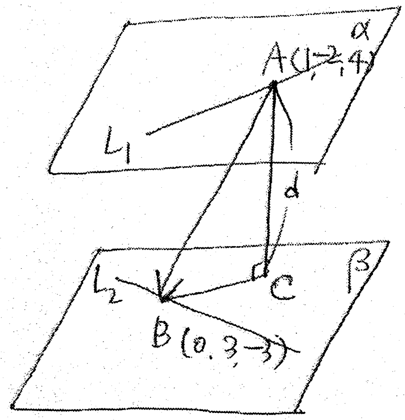
L_2 〃 $\vec{b} = \langle 2, 1, 4 \rangle$

$\vec{a} = t\vec{b}$ 인 t가 존재하지 않으므로 평행하지 않다.

② L_1의 매개식 $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t-2 \\ z = -t+4 \end{cases}$ L_2 〃 $\begin{cases} x = 2s \\ y = s+3 \\ z = 4s-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = t+1 = 2s \\ y = 3t-2 = s+3 \\ z = -t+4 = 4s-3 \end{cases}$ 동시에 만족하는 t, s가 존재하지 않으므로 두 직선은 만나지 않는다.

이제 L_1, L_2를 각각 포함하면서 평행한 두 평면을 α, β라 하자.



두 직선간의 거리 d는 두 평면간의 거리와 같고

그림에서 $d = \left| comp_{\vec{AC}} \vec{AB} \right|$

한편 $\vec{AC}$는 두 평면에 동시에 수직이므로

$\vec{AC} \parallel \vec{n}$ $\quad (\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \langle 13, -6, -5 \rangle)$

따라서 $\vec{AC}$ 대신 $\vec{n}$을 사용해도 된다.

$$\Rightarrow d = \left| comp_{\vec{n}} \vec{AB} \right| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \boxed{\frac{8}{\sqrt{230}}}$$

15. $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$는 편미분을 직접 해도 $(0,0)$을 대입할 수 없으므로 편도함수의 정의를 이용해서 구한다.

$$f_x(0,0) \overset{\text{정의}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) \overset{\text{정의}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

한편, 편도함수 f_x, f_y는 새로운 2변수 함수이다.

$$f_x = \frac{(3x^2y - 2y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - 2xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{(x^3 - 6xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y - 2xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = f_{yx}(0,0) = (f_y)_x(0,0) \overset{\text{정의}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = f_{xy}(0,0) = (f_x)_y(0,0) \overset{\text{정의}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-2h^5}{h^4} - 0}{h} = -2$$

///.

객관식 답

1) -1

2) $2\sqrt{3}$

3) 주면 $(1, \frac{3\pi}{4}, \sqrt{3})$, 구면 $(2, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4})$

4) 0

5) $(y-1)+\frac{1}{e}(z-e)=0$ 또는 $y+\frac{1}{e}z=2$

6) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

7) $x-y+z=0$

8) $\frac{1}{2}$

9) $<-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}>$

10) $\frac{11}{2}$

11) 세 개의 원 $r=1$, $r=2\cos\theta$와 $r=2\sin\theta$ 모두의 내부로 이루어진 영역의 넓이를 구하여라.

풀이)

$2\cos\theta = 2\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, $2\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$, $2\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ (2점)

넓이 $A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta)^2 d\theta$ (6점)

또는 대칭성을 이용하면

$A = 2[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1)^2 d\theta]$ .... (6점)

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\, d\theta + (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 - \cos 2\theta\, d\theta + \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (10점)

12. 함수 $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,에서 f_{xy}와 f_{yx}는 존재하고 연속이다.

1) $(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=(\frac{\partial f}{\partial r})^2+a(r)(\frac{\partial f}{\partial \theta})^2$ 을 만족하는 $a(r,\theta)$을 구하여라.

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=b(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+c(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+d(r,\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 을 만족하는 $b(r,\theta), c(r,\theta), d(r,\theta)$을 구하여라.

풀이)

1)

$f_r=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta, f_\theta=f_x(-r\sin\theta)+f_y(r\cos\theta)$ .... (2점)

$(f_r)^2=\cos^2\theta(f_x)^2+2\sin\theta\cos\theta f_xf_y+\sin^2\theta(f_y)^2$
$(f_\theta)^2=r^2\sin^2\theta(f_x)^2-2r^2\sin\theta\cos\theta f_xf_y+r^2\cos^2\theta(f_y)^2$

따라서

$(f_r)^2+\frac{1}{r^2}(f_\theta)^2=(f_x)^2+(f_y)^2$

그러므로 $a(r,\theta)=\frac{1}{r^2}$ .... (5점)

2)

$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}(f_r)=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(f_x)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(f_y)$ ....(7점)

$=\cos^2\theta f_{xx}+2\sin\theta\cos\theta f_{xy}+\sin^2\theta f_{yy}$

따라서

$b(r,\theta)=\cos^2\theta$
$c(r,\theta)=2\sin\theta\cos\theta$
$d(r,\theta)=\sin^2\theta$

(10점)

13. 두 점 $A(a,b,1)$와 $B(-1,a,b)$이 곡면 $x^4+2y^4+3z^4=6$ 위의 점 $C(1,1,1)$에서의 접평면 위에 있을 때 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.

풀이)

$F(x,y,z)=x^4+2y^4+3z^4-6=0$ 라고 두자

$\nabla F(C)=<4,8,12>$이다.

따라서 접평면의 방정식은

$4(x-1)+8(y-1)+12(z-1)=0$ 즉 $x+2y+3z=6$ ....(4점)

두 점을 접평면에 대입하여 a,b를 구하면 $a=5, b=-1$이다. ....(6점)

$\overrightarrow{CA}=<4,-2,0>$, $\overrightarrow{CB}=<-2,4,-2>$ 를 생각하자

그러면 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=2\sqrt{14}$ ....(10점)

14. 두 직선 $L_1 : x-1=\frac{y+2}{3}=-(z-4)$와 $L_2 : \frac{x}{2}=y-3=\frac{z+3}{4}$ 사이의 거리를 구하여라.

풀이)

직선 L_1, L_2의 방향벡터는 각각 $\vec{a}=<1,3,-1>$, $\vec{b}=<2,1,4>$이다. 따라서 두 직선은 평행하지 않다.

또한 그들의 매개방정식에서

$$\begin{cases} x=t+1 \ \ =2s \\ y=3t-2 \ =s+3 \\ z=-t+4=4s-3 \end{cases}$$

를 만족하는 t, s가 존재하지 않는다. 즉 두 직선은 만나지도 않는다.
따라서 직선 L_1를 품는 평면과 L_2를 품는 평면은 평행하다. .... (5점)

두 평면에 수직인 벡터는
$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=<13,-6,-5>$ 이다.
이제 L_1위의 하나의 점 $A(1,-2,4)$와 L_2위의 하나의 점 $B(0,3,-3)$를 잡자.

$\overrightarrow{AB}=<-1,5,-7>$를 생각하면 두 직선 사이의 거리 d는

$d=|Comp_{\vec{n}}\overrightarrow{AB}|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{8}{\sqrt{230}}$ ....(10점)

15. 함수 $f(x,y)$는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-2y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

이 때 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$를 각각 구하여라.

(풀이)

먼저 편도함수의 정의를 이용하자.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0 \text{ 이고}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0 \text{ 이다.}$$ .... (4점)

또한

$$f_x=\frac{(3x^2y-2y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-2xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y=\frac{(x^3-6xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-2xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}(f_y)|_{(0,0)}=\lim_{h\to0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}(f_x)|_{(0,0)}=\lim_{h\to0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{-2h^5}{h^4}-0}{h}=-2$$

(10점)