2010학년도 2학기 (기말고사)		학 과		감독교수확인
과 목 명	일반수학2	학년,학번		
출제교수명	공 동	분반,교수명		
시 험 일 시	2010.12.13.월요일 (오전10:00~11:40)	성 명		점 수

1번~10번의 문제는 단답형으로 각 문제당 배점은 5점이며 부분점수가 없다. <u>주어진 상자 안에 답만 쓸 것.</u>

1. $f(x,y)=\begin{cases} x & (x \ge y) \\ y & (x < y) \end{cases}$ 일 때, $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ 를 구하여라.

답:

2. 정적분 $\int_0^1\int_{y^2}^1 \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}\,y}\,dx\,dy$를 구하여라.

답:

3. 포물면 $z=x^2+y^2$ 과 포물면 $z=36-3x^2-3y^2$으로 둘러싸인 입체의 부피를 구하여라.

답:

4. 평면 $x-2y+z=5$ 가 포물주면 $y=x^2$ 과 $x=y^2$에 의해 잘린 부분의 넓이를 구하여라.

답:

5. $\int_0^2 \int_{2-x}^2 \int_0^{\frac{x+y-2}{2}} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx =$

$\int_0^1 \int_A^B \int_C^2 f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

일 때, A, B, C 를 각각 구하여라.

답: A= B= C=

6. $f(x,y,z) = x^2 + \sin y + y^2 z^3$ 이고 $\mathrm{F}(x,y,z) = < e^{x+y+z}, xy\cos(z), (x^2+y^2+z^2) >$ 일 때, $\nabla \cdot \nabla f$, $\nabla \times \mathrm{F}$을 각각 구하여라.

답: $\nabla \cdot \nabla f =$

$\nabla \times \mathrm{F} =$

7. a는 상수 벡터이고, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 일 때, 다음 중 항상 참인 것을 모두 골라라.

(a) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

(b) $\nabla \cdot (r\ \mathbf{r}) = 2r$

(c) $\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = -2\mathbf{a}$

답:

8. 포물선 $x = y^2$과 직선 $x = 4$로 둘러싸인 영역을 D라 하고 D의 경계를 C라 할 때, 반시계방향으로 C를 따르는 선적분 $\oint_c (y^2 + \ln(x+1))dx + (\sqrt{y^2+1} + 3x)dy$를 구하여라.

답:

2010학년도 2학기 (기말고사)		학 과		감독교수확인
과 목 명	일반수학2	학년,학번		
출제교수명	공 동	분반,교수명		
시 험 일 시	2010.12. 13.월요일 (오전10:00~11:40)	성 명		점 수

9. 다음 벡터장 F의 퍼텐셜함수를 구하여라.

$\mathrm{F}=< y^2-x,\ 2xy+\sin z,\ y\cos z+e^{3z} >$

답:

10. S를 구면 $x^2+y^2+z^2=9$이라 하고, n을 S의 외향 단위법선벡터라고 하자. 이 때, 벡터장 $\mathrm{F}=< z, y, x >$ 의 S를 통한 유량을 구하여라.

답:

11번~15번의 문제는 서술형으로 각 문제당 배점은 10점이다. 풀이과정을 쓸 것.

11. 곡면 $x^2+y^2-z^2-1=0$과 평면 $2x+y-z-4=0$이 만나는 점에서 $y+z$값의 최대와 최소를 구하여라.

12. 평면 영역 R이 심장형 $r=1-\cos\theta$의 내부, $(x+1)^2+y^2=1$의 외부, $y\geq 0$으로 주어진다고 할 때, 적분 $\iint_R y\,dA$의 값을 구하여라.

13. 추면 $z=\sqrt{3}\,r$ 위, 구면 $r^2+(z-1)^2=1$ 내부로 이루어진 입체 영역을 T라 할 때, $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ 를 구하여라.

2010학년도 2학기 (기말고사)		학 과		감독교수확인	
과 목 명	일반수학2	학년,학번			
출제교수명	공 동	분반,교수명			
시 험 일 시	2010.12. 13.월요일 (오전10:00~11:40)	성 명		점 수	

14. C는 점 (1,0,1)에서 점 (2,5,2)까지의 직선분이고, 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+yz)\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$일 때, C를 따른 선적분 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$를 구하여라.

15. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2z\mathbf{i}+xy^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$이고, C는 $x+y+z=1$과 $x^2+y^2=9$가 만나는 곡선이다. 위에서 보았을 때, 반시계방향으로 C를 따른 선적분 $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$를 Stokes 정리를 이용하여 구하여라.

1. $\frac{2}{3}$

2. $e-2$

3. 162π

4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. A=$2z$, B=2, C=$2+2z-y$

6. $\nabla \cdot \nabla f = 2 - \sin y + 2z^3 + 6y^2 z$

$\nabla \times F = < 2y + xy\sin z\,, e^{x+y+z} - 2x\,, y\cos z - e^{x+y+z} >$

7. (a), (c)

8. 32

9. $xy^2 - \frac{1}{2}x^2 + y\sin z + \frac{1}{3}e^{3z} + C$

10. 36π

11. 곡면 $x^2+y^2-z^2-1=0$과 평면 $2x+y-z-4=0$이 만나는 점의 $y+z$값의 최대와 최소를 구하여라.

(풀이) Lagrange 승수법을 이용하면, $\begin{cases} -2\lambda x-2\mu=0 \\ 1-2\lambda y-\mu=0 \\ 1+2\lambda z+\mu=0 \\ x^2+y^2-z^2-1=0 \\ 2x+y-z-4=0 \end{cases}$ 이다.

여기서 $\mu=-\lambda x$ 이므로, $\lambda(2y-x)=1$ 이고, $\lambda(x-2z)=1$ 이다.

$\lambda\neq 0$ 이 될 수 없으므로, $2y-x=\dfrac{1}{\lambda}$, $x-2z=\dfrac{1}{\lambda}$ 에서 λ를 소거하면,

$y+z-x=0$ 이다.

이 식을 $x^2+y^2-z^2-1=0$ 와 $2x+y-z-4=0$ 함께 연립하여 풀면,

$x=2-\sqrt{3}$, $y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z=1-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

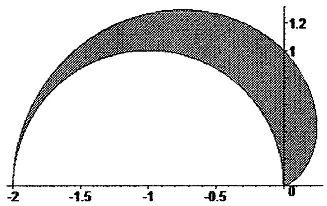
와 $x=2+\sqrt{3}$, $y=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z=1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 $y+z$의 최댓값은 $2+\sqrt{3}$ 이고, 최솟값은 $2-\sqrt{3}$ 이다.

12. 평면 영역 R이 심장형 $r=1-\cos\theta$의 내부, 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 외부, $y\geq 0$으로 주어진다고 할 때, 적분 $\iint_R y\,dA$의 값을 구하여라.

(풀이) 원 $(x+1)^2+y^2=1$을 극좌표로 표시하면 $r=-2\cos\theta$가 된다. $(1-\cos\theta)-(-2\cos\theta)=1+\cos\theta\geq 0$에서 이 원은 위의 심장형 내부에 있음을 알 수 있다. 영역 R은 오른쪽 그림의 색칠된 부분이다.

이제 극좌표를 이용하여 문제의 적분을 계산하면,



$$\begin{aligned}\iint_R y\,dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1-\cos\theta} r\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{-2\cos\theta}^{1-\cos\theta} r\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta\\ &=\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{-2\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\\ &=\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos\theta)^3}{3}\sin\theta\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(-2\cos\theta)^3}{3}\sin\theta\,d\theta\\ &=\left.\frac{(1-\cos\theta)^4}{12}\right|_0^{\pi}-\left.\frac{2\cos^4\theta}{3}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

13. 추면 $z=\sqrt{3}\,r$ 위, 구면 $r^2+(z-1)^2=1$ 내부로 이루어진 입체 영역을 T 라 할 때 $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ 를 구하여라.

(풀이) 주어진 추면과 구면을 구면좌표로 표현하면,

$$z=\sqrt{3}\,r \quad \Rightarrow \quad \rho\cos\phi=\sqrt{3}\,\rho\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \phi=\frac{\pi}{6}$$ 이고,

$$r^2+(z-1)^2=1 \quad \Rightarrow \quad \rho=2\cos\phi$$ 이다.

따라서,

$$\begin{aligned}
\iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2\cos\phi} \rho^3\sin\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^4\phi\sin\phi\ d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{4}{5}\cos^5\phi\right]_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\
&= \frac{8\pi}{5}\left(1-\frac{9\sqrt{3}}{32}\right)
\end{aligned}$$

이다.

14. C는 점 (1,0,1)에서 점 (2,5,2)까지의 직선분이고,

벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+yz)\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$일 때,

C를 따른 선적분 $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$를 구하여라.

(풀이) 직선분 C를 매개변수로 표현하면,

$$\mathbf{r}(t)=<x(t),y(t),z(t)> = <t+1, 5t, t+1> \quad (0\le t\le 1)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds &= \int_C (x+yz)dx+(2x)dy+(xyz)dz \\ &= \int_0^1 [((t+1)+5t(t+1))\cdot 1+2(t+1)\cdot 5+(t+1)(5t)(t+1)\cdot 1]\,dt \\ &= \int_0^1 (5t^3+15t^2+21t+11)\,dt \\ &= \frac{111}{4}\ .\end{aligned}$$

15. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2z\mathbf{i}+xy^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$이고,

C는 $x+y+z=1$과 $x^2+y^2=9$가 만나는 곡선이다.

위에서 보았을 때, 반시계방향으로 C를 따른 선적분 $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$를 Stokes 정리를 이용하여 구하여라.

(풀이) 평면 $x+y+z=1$ 에서 곡선 C가 둘러싸는 영역을 S라 하면, Stokes정리에 의해서, $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS$ 가 성립한다. 이때, $\mathbf{n}$은 평면 $x+y+z=1$의 위쪽으로 향하는 단위법선벡터이다.

R을 xy-평면에서 중심이 원점에 있고 반지름이 3인 원의 내부라고 하면, S는

$$\mathbf{r}: R\rightarrow S\ ,\quad \mathbf{r}(x,y)=<x,y,1-x-y>$$

과 같이 매개 변수로 표현할 수 있다. 따라서

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}=<1,0,-1>\ ,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=<0,1,-1>$$

이므로,

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=<1,1,1>\ \text{이고}\ \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|=\sqrt{3}$$

이다. 따라서

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1,1,1>$$

이다. 또한

$$\nabla\times\mathbf{F}=<0,x^2,y^2>$$

이므로,

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds &= \iint_R (x^2+y^2)\,dA\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\,r\,dr\,d\theta\\ &= \frac{81}{2}\pi\ .\end{aligned}$$