1번 - 8번은 단답형 문제(각 5점)입니다. 반드시 별도의 답안지의 해당 문제 빈칸에 답을 쓰십시오.

1번. 이차다항식 $P(x)$가 다음 우극한을 만족할 때, $P(x)$를 구하시오.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - P(x)}{x^2} = \frac{1}{6}$$

2번. $\mathbb{R}^3$에서 원기둥좌표가 $\left(2\sqrt{3},\ \frac{\pi}{3},\ -2\right)$인 점의 좌표를 구면좌표 (ρ, ϕ, θ)로 나타내시오.

3번. 구면좌표에서 다음 부등식을 모두 만족하는 삼차원 영역의 부피를 구하시오.

$$0 \le \rho \le 2\cos\phi, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

4번. 벡터 $\mathbf{a} = (2, -1, -2)$와 $\mathbf{b} = (7, -5, -4)$에 대해 벡터 $\mathbf{u}$는 $\mathbf{a}$와 평행하고 벡터 $\mathbf{v}$는 $\mathbf{a}$와 수직이며, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{b}$이라고 한다. 이 때 $\mathbf{v}$를 구하시오.

5번. $\mathbb{R}^3$의 세 점 $P(2, 0, 1)$, $Q(-1, 2, 2)$, $R(1, 3, 6)$에 대해 다음 집합의 넓이를 구하시오.

$$\left\{X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR},\ \ 0 \le s \le 1,\ \ 0 \le t \le 2\right\}$$

6번. $\mathbb{R}^3$에서 세 점 $P(2, -1, 1)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(1, -1, 4)$을 지나는 평면과 점 $(7, -6, 3)$ 사이의 최단거리를 구하시오.

7번. 행렬 $\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 $\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$일 때, a와 b의 값을 각각 구하시오.

(**주의**. 답을 $a =\ \ $, $b =\ \ $ 형태로 쓰시오.)

8번. 행렬 $\begin{pmatrix} a & 3b & 2c \\ 2a & 3b & c \\ a & 2b & 3c \end{pmatrix}$의 행렬식(det)이 2022일 때, abc의 값을 구하시오.

9번 - 14번은 서술형 문제입니다. 풀이와 답을 별도의 답안지의 해당 문제 빈칸에 쓰십시오.

9번. (8점) 다음 연립일차방정식의 계수행렬을 A라 할 때, 역행렬 A^{-1} 를 구하고, 이를 이용하여 이 연립방정식의 해를 구하시오.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

10번. (10점)

(a) $x = 0$에서 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$의 3차 테일러 다항식을 구하시오.

(b) (a)의 결과를 이용하여 $\dfrac{1}{\sqrt{0.92}}$의 근삿값을 소수(decimal) 형태로 쓰시오.

11번. (10점) 함수 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan\left(2t^2\right) dt \ \left(|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$를 생각하자.

(a) $x = 0$ 에서 $f(x)$의 테일러 급수를 <u>항별적분</u>을 이용하여 구하시오.

(b) (a)에서 구한 급수에서 x^{11}의 계수를 구하시오. 답을 기약분수로 쓰시오.

12번. (10점) 두 복소수 $z_1 = -1 + i$ 와 $z_2 = -\sqrt{3} - i$ 의 극형식을 이용하여 $\dfrac{z_1^{25}}{z_2^{15}}$ 의 크기 $\left|\dfrac{z_1^{25}}{z_2^{15}}\right|$ 와 편각의 주요값 $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1^{25}}{z_2^{15}}\right)$을 각각 구하시오. ($2^n$ 형태의 값을 계산하시오.)

13번. (10점) 극좌표로 다음과 같이 표현된 두 곡선을 xy 평면에 그렸을 때, 두 곡선의 모든 교점을 <u>직교좌표</u>로 나타내시오.

$$r = 2 + \cos(2\theta), \qquad r = 3 - \sin\theta$$

14번. (12점) $\mathbb{R}^3$에서 두 평면 $x - 2y + z = 3$ 과 $2x - 3y + 3z = 7$ 의 교선을 L이라 하자.

(a) 직선 L 과 평면 $x + y + z = 3$ 의 교점의 좌표를 구하시오.

(b) 점 $(5, 1, 0)$에서 출발한 빛이 (a)에서 구한 교점에서 평면 $x + y + z = 3$ 에 반사되어 나갔다. 반사된 빛이 진행하는 방향의 벡터가 $(-1, a, b)$와 평행할 때, a 와 b의 값을 각각 구하시오. (반사 전후에 빛은 직선을 따라 진행하고, 입사각과 반사각이 같다고 가정한다.)

단답형 답

1번. $1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$

2번. $\left(4, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

3번. π

4번. $(1,-2,2)$

5번. $14\sqrt{6}$

6번. 7

7번. $a=3,\ b=4$

8번. -337

단답형 풀이

1번. $x\in\mathbb{R}$에 대해 $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6u(x)$이므로 ($u(x)$는 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대해 수렴하는 멱급수이고 $u(0) = -\frac{1}{6!}$), $x>0$이면 $\cos(\sqrt{x}) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+x^3u(\sqrt{x})$이다. $\lim_{x\to0^+} u(\sqrt{x}) = -\frac{1}{6!}$ 이므로

$$\frac{1}{6} = \lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+x^3u(\sqrt{x})-P(x)}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}-P(x)}{x^2}$$

이고, 따라서 $P(x) = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}-\frac{x^2}{6} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ 이다. $\square$

2번. 주어진 점의 직교좌표가 (x,y,z)이면 $x=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},\ y=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=3, z=-2$ 이다. 주어진 점의 구면좌표가 (ρ,ϕ,θ)이면 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4$ 이고 $\cos\phi=\frac{z}{\rho}=-\frac{1}{2}$ 이므로 $\phi=\frac{2\pi}{3}$ 이다. 수평 방향을 나타내는 θ는 그대로 유지된다. $\square$

3번. 주어진 두 부등식을 직교좌표로 쓰면 각각 $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$ 과 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 이고, 두 곡면 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 과 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 의 교선은 평면 $z=1$ 에 포함된다.

따라서 주어진 영역은 윗면의 반지름이 1이고 높이가 1인 원뿔과 반지름이 1인 반구의 합집합이다. 따라서 구하려는 부피는 $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$ 이다. $\square$

4번. 정사영 공식으로부터 $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} = 3\mathbf{a} = (6,-3,-6)$ 이므로, $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{u} = \mathbf{b} - 3\mathbf{a} = (1,-2,2)$이다. $\square$

5번. $s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} = s\overrightarrow{PQ} + \dfrac{t}{2}\cdot 2\overrightarrow{PR}$ 이고 $s, \dfrac{t}{2} \in [0,1]$이므로, $R' = P + 2\overrightarrow{PR} = 2R - P = (0,6,11)$이라 두면 주어진 집합은 두 선분 PQ와 PR'을 이웃한(꼭짓점 P를 공유하는) 두 변으로 가지는 평행사변형이다.

$\overrightarrow{PQ} = (-3,2,1)$이고 $\overrightarrow{PR'} = 2(-1,3,5)$이므로, $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR'} = 14(1,2,-1)$이다. 따라서 구하려는 넓이는 $\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR'}\| = 14\sqrt{6}$ 이다. $\square$

[별해] 집합 $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR},\ 0 \le s,t \le 1\}$의 넓이를 두 배 해도 좋다.

6번. $\overrightarrow{PQ} = (2,2,-3)$이고 $\overrightarrow{PR} = (-1,0,3)$이므로, $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = (6,-3,2)$는 평면 M 의 법선 벡터이다. 따라서 M 의 방정식은 $6x - 3y + 2z = 17$ 이다.

점 $(7,-6,3)$와 평면 $6x-3y+2z=17$ 사이의 최단거리는

$$\frac{|42 + (-3)(-6) + 6 - 17|}{\|(6,-3,2)\|} = \frac{49}{7} = 7$$

이다. $\square$

7번. $$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a&a\\1&b&a\\1&a&b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4a-3b&4a-3b\\0&-a+b&0\\0&0&-a+b\end{pmatrix}$$ 이므로,

$$4a - 3b = 0, \qquad -a + b = 1$$

이다. 이 연립방정식의 해는 $a = 3$, $b = 4$ 이다. $\square$

8번.

$$2022 = \det\begin{pmatrix}a&3b&2c\\2a&3b&c\\a&2b&3c\end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix}3b&c\\2b&3c\end{pmatrix} - 3b\det\begin{pmatrix}2a&c\\a&3c\end{pmatrix} + 2c\det\begin{pmatrix}2a&3b\\a&2b\end{pmatrix}$$
$$= -6abc$$

이므로 $abc = -337$ 이다. $\square$

9번. 주어진 연립방정식을

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

으로 나타낼 수 있다. 계수행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$의 역행렬 $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$을 위의 등식 양변의 왼쪽에 곱하면

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

이다. 그러므로 구하려는 해는 $x = -\frac{4}{7}$, $y = \frac{5}{7}$ 이다. □

10번. (a) $f(x) = (1-x)^{-1/2}$이라 두면

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}, \quad f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2}, \quad f'''(x) = \frac{15}{8}(1-x)^{-7/2}$$

이므로,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{3}{4}, \quad f'''(0) = \frac{15}{8}$$

이다. 따라서 $x = 0$ 에서 $f(x)$의 3차 테일러다항식은

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$$

이다.

(b) (a)에서 얻은 3차 테일러다항식에 $x = 0.08$을 대입한다. 구하려는 근삿값은

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{0.92}} = f(0.08) &\approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.08 + \frac{3}{8} \times 8^2 \times 10^{-4} + \frac{5}{16} \times 8^3 \times 10^{-6} \\ &= 1 + 0.04 + 24 \times 10^{-4} + 16 \times 10^{-5} \\ &= 1.04 + 0.0024 + 0.00016 = 1.04256 \end{aligned}$$

이다. (참고: $1/\sqrt{0.92} \approx 1.04257207$) □

11번. (a) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $(|x| < 1)$이므로,

$$\arctan(2t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} t^{4n+2} \qquad \left(|t| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

이다. 따라서 항별(정)적분에 의해

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} t^{4n+2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)(4n+3)} x^{4n+3} \qquad \left(|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

이다.

(b) $4n+3=11$ 로부터 $n=2$ 이므로, x^{11}의 계수는 $\dfrac{2^5}{5 \cdot 11} = \dfrac{32}{55}$ 이다. □

12번. $z_1 = -1+i = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$ 이고 $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2e^{7\pi i/6}$ 이므로,

$$\frac{z_1^{25}}{z_2^{15}} = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{75\pi i/4} e^{-35\pi i/2} = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{5\pi i/4} \qquad \left(= -\frac{1}{8}(1+i)\right)$$

이다. 그러므로

$$\left|\frac{z_1^{25}}{z_2^{15}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{8}, \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1^{25}}{z_2^{15}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$$

이다. □

[참고] $z_1^{25} = 2^{12}\sqrt{2}e^{75\pi i/4} = 2^{12}\sqrt{2}e^{3\pi i/4} = 2^{12}(-1+i)$ 와
$z_2^{15} = 2^{15}e^{35\pi i/2} = 2^{15}e^{-\pi i/2} = -2^{15}i$ 를 이용해도 좋다. ////

13번. 모든 $\theta \in \mathbb{R}$에 대해 $2+\cos(2\theta) > 0$이고 $3 - \sin\theta > 0$이므로, 방정식

$$2 + \cos(2\theta) = 3 - \sin\theta$$

로부터 모든 교점을 얻는다. 배각의 공식을 이용하여 이 방정식을

$$2\sin^2\theta = \sin\theta$$

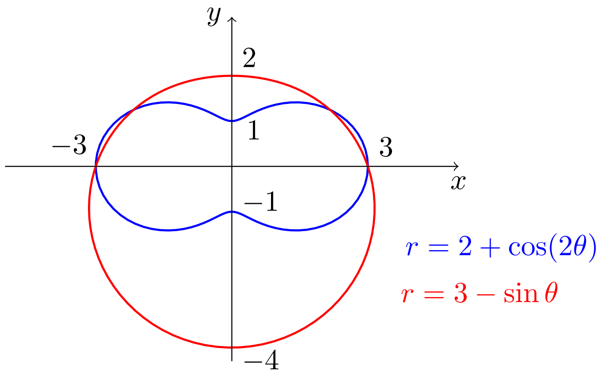
으로 쓸 수 있다. 따라서 $\sin\theta = 0$ 이거나 $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ 이다.

(i) $\sin\theta = 0$이면 $\cos(2\theta) = 1$ 이므로 $\cos\theta = \pm 1$ 이다. 이 때 $r = 3$이므로, 직교좌표로 표현된 두 교점 $(\pm 3, 0)$을 얻는다.

(ii) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ 이면 $\cos(2\theta) = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 이 때 $r = \dfrac{5}{2}$ 이므로, 직교좌표로 표현된 두 교점 $\left(\pm\dfrac{5\sqrt{3}}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$를 얻는다.

따라서 구하려는 교점은 직교좌표로 $(3,0)$, $(-3,0)$, $\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$이다. □

[참고] (13번, 두 곡선의 개형)



14번. (a) 연립방정식

$$x - 2y + z = 3, \qquad 2x - 3y + 3z = 7$$

에서 x를 소거하여 $z = 1 - y$를 얻는다. 이를 두 방정식 중 하나에 대입하여 $x = 2 + 3y$를 얻는다. 이 결과를 $x + y + z = 3$에 대입하면

$$3 = (2 + 3y) + y + (1 - y) = 3 + 3y$$

이므로 $y = 0$이다. 그러므로 교점의 좌표는 $(2, 0, 1)$이다.

(b) $\mathbf{v} = (5, 1, 0) - (2, 0, 1) = (3, 1, -1)$, $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$이라 두면 $-\mathbf{v}$는 빛이 반사되기 전에 진행하던 방향을 나타내고, $\mathbf{n}$은 평면 $x + y + z = 3$의 법선벡터이다.

벡터 $\mathbf{v}$를 $\mathbf{n}$에 내린 정사영을 $\mathbf{w}$라 하면

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \mathbf{n}$$

이므로, 점 $(2, 0, 1)$에서 평면 $x + y + z = 3$에 반사된 빛은

$$\mathbf{w} + (\mathbf{w} - \mathbf{v}) = 2\mathbf{n} - \mathbf{v} = (-1, 1, 3)$$

방향으로 진행한다. $(-1, 1, 3)$이 $(-1, a, b)$와 평행하므로 $a = 1$이고 $b = 3$이다. □