1번 - 6번은 단답형 문제(각 5점)입니다. 답을 별도의 답안지의 해당 문제 빈칸에 쓰십시오.

1번. 곡면 S 가 다음과 같이 매개화되었을 때, S 의 점 $(4, 3, -2)$에서 이 곡면에 접하는 평면의 방정식을 구하시오. (**주의**: 답을 x, y, z 의 관계식으로 나타내시오.)

$$X(u, v) = (u + v,\ uv,\ -u + v)$$

2번. 매개화된 곡선 C 가 다음과 같이 주어졌다.

$$C(t) = (t + \sin^2 t,\ t,\ \cos^2 t) \quad (0 \le t \le \pi)$$

보존장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(\sin y,\ x \cos y + 2y,\ ze^z\big)$$

에 대해 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오.

3번. 평면 $2x - 2y + z = 6$ 중에서 $x^2 + y^2 \le 3$ 을 만족하는 부분의 넓이를 구하시오.

4번. 곡면 $z = x^2 + y$ $(0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3)$를 S 라 할 때, 면적분 $\iint_S x \, dS$ 의 값을 구하시오.

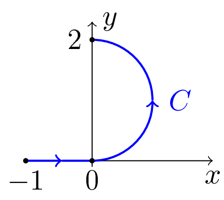
5번. $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $z = 2x^2 + 2y^2$의 위쪽과 곡면 $z = 3 - x^2 - y^2$의 아래쪽에 위치하는 공통 영역의 부피를 구하시오.

6번. 위쪽 반구면 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 과 원뿔면 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 으로 둘러싸인 유계 영역을 D 라 할 때, 삼중적분 $\iiint_D z \, dV$ 의 값을 구하시오.

다음 페이지 7번 - 12번은 서술형 문제입니다. 풀이와 답을 별도의 답안지의 해당 문제 빈칸에 쓰십시오. 계산 과정을 모두 써야 합니다.

7번. (10점) xy 평면의 네 점 $(0,0)$, $(2,-2)$, $(3,0)$, $(1,2)$를 꼭짓점으로 가지는 평행사변형을 D라 할 때, 이중적분의 변수변환 공식을 이용하여 $\iint_D x\,dxdy$ 의 값을 구하시오.

8번. (10점) xy 평면의 곡선 C가 그림과 같이 점 $(-1,0)$에서 출발하여 선분을 따라 점 $(0,0)$까지 진행한 뒤, 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 오른쪽 반원을 따라 점 $(0,2)$까지 진행한다. 이 때 선적분 $\int_C (xy+1)dx + x\,dy$ 의 값을 구하시오.



9번. (12점) 유향곡면 S가 포물면 $z=2x^2+y^2$ 중에서 $z \le 3-x^2-2y^2$을 만족하는 부분이고, S의 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}<0$을 만족한다. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,-z)$에 대해 면적분의 정의를 이용하여 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 의 값을 구하시오.

10번. (10점) 영역 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \ge \sqrt{3}|x|$ 이고 $x^2+y^2\le 1\}$에 대해 그린 정리를 이용하여 선적분 $\oint_{\partial D}(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy$ 의 값을 구하시오.

11번. (15점) 구 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 중에서 $z\ge 0$을 만족하는 부분을 D라 하자. 벡터장 $\mathbf{F}(x,\,y,\,z)=\left(xz^2,\ \frac{1}{3}y^3+\tan z,\ x^2z+1\right)$에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) 발산 정리를 이용하여 $\iint_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 의 값을 구하시오. 여기에서 $\mathbf{n}$은 ∂D의 외향 단위법선벡터장이다.

(b) 유향곡면 S가 반구면 $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$이고, S의 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\ge 0$을 만족할 때, (a)의 결과를 이용하여 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 의 값을 구하시오.

12번. (13점) 위쪽 반구면 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 중에서 $z\ge\sqrt{3}$을 만족하는 부분을 S라 하고, S의 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\ge 0$을 만족한다고 하자.

벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,xy,xz)$에 대해 스토크스 정리를 이용하여 면적분 $\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 의 값을 구하시오.

단답형 문제 답

1번. $2x - y + z = 3$

2번. π^2

3번. 9π

4번. $13\sqrt{2}$

5번. $\dfrac{3\pi}{2}$

6번. 2π

단답형 문제 풀이

1번. $X(u_0, v_0) = (4, 3, -2)$를 만족하는 u_0, v_0는 $(u_0, v_0) = (3, 1)$이다.

$$X_u(u, v) = (1, v, -1), \qquad X_v(u, v) = (1, u, 1)$$

이므로, $(X_u \times X_v)(u, v) = (v + u, -2, u - v)$이다. 따라서 $(X_u \times X_v)(3, 1) = (4, -2, 2)$에 수직이고 점 $(4, 3, -2)$를 지나는 평면의 방정식은 $2x - y + z = 3$ 이다. □

2번. $\phi(x, y, z) = x \sin y + y^2 + (z - 1)e^z$ 라 두면 $\nabla\phi = \mathbf{F}$ 이므로,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = \phi(C(\pi)) - \phi(C(0)) \\ &= \phi(\pi, \pi, 1) - \phi(0, 0, 1) = \pi^2\end{aligned}$$

이다. □

3번. 주어진 곡면을

$$X(x, y) = (x,\ y,\ -2x + 2y + 6) \quad (x^2 + y^2 \le 3)$$

으로 매개화하면 $dS = \sqrt{1 + 4 + 4}\, dxdy = 3\, dxdy$ 이다. xy 평면에서 원 $x^2 + y^2 = 3$ 으로 둘러싸인 원판을 D 라 두면 구하려는 넓이는

$$\text{area}(S) = \iint_S 1\, dS = \iint_{x^2+y^2\le 3} 3\, dxdy = 9\pi$$

이다. □

Typeset by LaTeX

4번. 곡면 S 를

$$X(x,y) = (x,\, y,\, x^2 + y) \qquad (0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3)$$

로 매개화하면 $dS = \sqrt{2+4x^2}\,dxdy$ 이므로,

$$\iint_S x\,dS = \int_0^3 \int_0^2 x\sqrt{2+4x^2}\,dxdy = 3\sqrt{2}\int_0^2 x\sqrt{1+2x^2}\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[(1+2x^2)^{3/2}\Big]_0^2 = 13\sqrt{2}$$

이다. □

5번. 주어진 입체를 D 라 하면

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\ 2x^2+2y^2 \le z \le 3 - x^2 - y^2\}$$

이다. 푸비니 정리와 극좌표 치환에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(D) = \iiint_D 1\,dV &= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{2x^2+2y^2}^{3-x^2-y^2} dz\right)dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} 3(1-x^2-y^2)dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3(1-r^2)r\,drd\theta = 6\pi\int_0^1 (r-r^3)dr = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

이다. □

6번. 주어진 영역 D를 다음과 같이 구면좌표로 나타낼 수 있다.

$$0 \le \rho \le 2, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

따라서

$$\begin{aligned}\iiint_D z\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \rho\cos\phi\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi\left(\int_0^2 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/4}\cos\phi\sin\phi\,d\phi\right) \\ &= 2\pi\cdot 4\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\pi/4} = 2\pi\end{aligned}$$

이다. □

서술형 문제 풀이

7번. 영역 D는 다음 연립부등식으로 표현된다.

$$0 \le x+y \le 3, \quad 0 \le 2x-y \le 6$$

$u = x+y,\ v = 2x-y$ 라 두면 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -3$ 이므로,

$dudv = \left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy = 3\,dxdy$ 이다. $dxdy = \dfrac{1}{3}\,dudv$ 이므로, 이중적분의 변수변환 공식에 의해

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_0^6 \int_0^3 \frac{1}{3}(u+v)\cdot\frac{1}{3}\,dudv \\ &= \frac{1}{9}\int_0^6\int_0^3 u\,dudv + \frac{1}{9}\int_0^6\int_0^3 v\,dudv \ = 9\end{aligned}$$

이다. □

8번. 곡선 C_1, C_2를 각각

$$\begin{aligned} &C_1(t) = (t,0) \quad (-1 \le t \le 0), \\ &C_2(t) = (\cos t,\ 1+\sin t) \quad \Big(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\Big) \end{aligned}$$

로 매개화하면 $C = C_1 + C_2$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_C (xy+1)dx + x\,dy &= \int_{C_1}(xy+1)dx + x\,dy + \int_{C_2}(xy+1)dx + x\,dy \\ &= \int_{-1}^0 dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big[(\cos t + \cos t\sin t + 1)(-\sin t) + \cos^2 t\big]dt \\ &= 1 + 2\int_0^{\pi/2}\big(-\cos t\sin^2 t + \cos^2 t\big)dt \\ &= 1 + \Big[-\frac{2}{3}\sin^3 t + t + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big]_0^{\pi/2} \ = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

이다. (여기에서 홀함수와 짝함수의 대칭성을 이용하였다.) □

9번. 곡면 S를 다음과 같이 매개화하자.

$$X(x,y) = (x, y, 2x^2+y^2) \quad (x^2+y^2 \le 1)$$

$X_x(x,y) = (1,0,4x)$이고 $X_y(x,y) = (0,1,2y)$이므로, $(X_x \times X_y)(x,y) = (-4x,-2y,1)$ 이다. $(X_x \times X_y)\cdot \mathbf{k} = 1 > 0$ 이므로 $\mathbf{n}$과 $X_x \times X_y$ 는 반대 방향을 가리킨다. 따라서

$$\mathbf{n}\,dS = -(X_x \times X_y)(x,y)dxdy \ = (4x,2y,-1)dxdy$$

이고,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= -\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbf{F}(X(x,y))\cdot(X_x\times X_y)(x,y)dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1}(x,y,-2x^2-y^2)\cdot(4x,2y,-1)dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1}(6x^2+3y^2)\,dxdy \\ &= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3\cos^2\theta + r^3)drd\theta \ = \frac{9\pi}{4}\end{aligned}$$

이다. □

10번. 그린정리와 극좌표 치환에 의해

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}(x^2-y^2)dx + (x^2+y^2)dy \ &= \iint_D (2x+2y)\,dA \\ &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3}\int_0^1 2r(\cos\theta+\sin\theta)r\,drd\theta \\ &= \left(\int_0^1 2r^2dr\right)\left(\int_{\pi/3}^{2\pi/3}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

이다. □

11번. (a) D를 구면좌표로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$0\le\rho\le 1, \quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

발산정리와 변수변환 공식에 의해

$$\begin{aligned}\iint_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV \ &= \iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^4\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi\left(\int_0^1\rho^4\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\phi\right) \ = \frac{2\pi}{5}\end{aligned}$$

이다. □

(b) 원판 $S_1 : x^2 + y^2 \le 1, z = 0$ 에 대해 $\partial D = S \cup S_1$ 이므로, (a)의 결과로부터

$$\frac{2\pi}{5} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

유향곡면 S_1의 단위법선벡터장이 $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$이고 $\mathbf{F}(x, y, 0) = \left(0, \frac{y^3}{3}, 1\right)$이므로, 위의 등식에 의해

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \frac{2\pi}{5} - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \frac{2\pi}{5} - \iint_{S_1} \left(0, \frac{y^3}{3}, 1\right) \cdot (0, 0, -1)\, dS \\ &= \frac{2\pi}{5} + \operatorname{area}(S_1) \ = \frac{7\pi}{5}\end{aligned}$$

이다. □

12번. 두 곡면

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{3}$$

의 교선은 ∂S 이다. ∂S 를 xy 평면에 정사영한 곡선이 양의 방향(반시계 방향)을 가지도록 ∂S 의 향을 정하면 스토크스 정리를 적용할 수 있다. 그래서 ∂S 를

$$C(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}) \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

으로 매개화한다. $C'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$이므로, 스토크스 정리에 의해

$$\begin{aligned}\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \ = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(C(t)) \cdot C'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3} \sin t,\ \cos t \sin t,\ \sqrt{3} \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3} \sin^2 t + \cos^2 t \sin t)\, dt \\ &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin(2t) - \frac{1}{3} \cos^3 t\right]_0^{2\pi} = -\sqrt{3}\pi\end{aligned}$$

이다. □