1번 - 8번은 단답형 문제(각 5점)입니다. 답을 별도의 답안지의 해당 문제 빈칸에 쓰십시오.

1번. 곡선 $C(t) = (t, t^2, 1)$ $(0 \le t \le 1)$와 함수 $f(x, y, z) = xz$ 에 대하여 선적분 $\int_C f\, ds$ 의 값을 구하시오.

2번. xy 평면에서 $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$을 꼭짓점으로 가지는 삼각형 영역의 경계 C 를 따르는 선적분 $\int_C 3xy(x+2y)\, ds$ 의 값을 구하시오.

3번. xy 평면에서 극좌표 방정식으로 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$로 주어진 곡선 C 의 길이를 구하시오.

4번. 벡터함수 $\mathbf{x}(s,t) = (2s+t, 4s+3t)$와 점 $P(2,-1)$에 대하여 $\mathbf{x}(P) = (\alpha, \beta)$라 쓰자. C^1 함수 $f(x,y)$에 대하여 $\nabla f(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha^2)$일 때, 편미분계수 $(f \circ \mathbf{x})_s(P)$의 값을 구하시오.

5번. 점 $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - y\cos x + 2\sin y$ 가 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 $\mathbf{u}$ 라 할 때, 방향미분계수 $D_{\mathbf{u}} f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하시오.

6번. $\mathbb{R}^2$에서 정의된 함수 $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2(y^3+y) + y^2 - 2y$ 의 임계점 중에서 안장점을 모두 구하시오. (안장점이 없으면 답란에 '없음'이라 쓰시오.)

7번. xy 평면의 영역 D는 포물선 $y = x^2 - 4$ 와 반원 $y = \sqrt{4 - x^2}$ $(|x| \le 2)$으로 둘러싸인 유계 영역이다. 이 때 이중적분 $\iint_D (x+1)\, dA$ 의 값을 구하시오.

8번. 다음 반복적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^{\sqrt[4]{\pi}} \int_{x^2}^{\sqrt{\pi}} x\sin(y^2)\, dy dx \qquad \left(\sqrt[4]{\pi} = \pi^{1/4}\right)$$

9번 - 14번은 서술형 문제입니다. 풀이와 답을 별도의 답안지의 해당 문제 빈칸에 쓰십시오.

9번. (8점) 곡면 $e^z = xy(z-1)$의 점 $(1,\,-1,\,0)$ 근방에서 z가 x, y의 C^2 실함수 $z = z(x,y)$로 표현된다고 한다. 이 때 $z_{xx}(1,\,-1)$의 값을 구하시오.

10번. (10점) 곡면 $S : x^2+y^2+z^2-xy-yz=3$과 평면 $\Pi : x+y+z=1$의 교선의 어떤 점 (a,b,c)에서 곡면 S에 접하는 평면이 Π와 수직이라 한다.

(a) 점 (a,b,c)를 모두 구하시오.

(b) (a)에서 구한 점에서 S에 접하는 평면의 방정식을 각각 구하시오.

11번. (10점) 다음 함수 f에 대해 아래의 물음에 답하시오.

$$f(x,y) = e^x \sin y + y \qquad (x \in \mathbb{R},\ \ 0 < y < 2\pi)$$

(a) 정의역 $\mathbb{R} \times (0, 2\pi)$에서 f의 임계점을 구하시오.

(b) (a)에서 구한 임계점 $\mathbf{p}$에서 단위벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 방향 이계미분계수 $D^2_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})$ $\left(= \dfrac{d^2}{dt^2}\Big|_0 f(\mathbf{p}+t\mathbf{u}) \right)$를 u_1, u_2의 식으로 나타내고, $D^2_{\mathbf{u}} f(\mathbf{p})$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오. (필요하면 u_1, u_2를 극좌표로 나타내시오.)

12번. (10점) 실수 x, y, z가 $2x-3y-4z=49$를 만족할 때, <u>라그랑주 승수법을 이용</u>하여 $f(x,y,z) = 2x^2+y^2+3z^2$의 최솟값을 구하시오.

13번. (10점) xy평면의 영역 D_1은 $(0,1)$, $(1,1)$, $(0,2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 영역이고, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ x^2 \leq y \leq 1\}$이다. 이 때 다음 이중적분의 값을 구하시오.

$$\iint_{D_1 \cup D_2} (x+2y)\, dA$$

14번. (12점) 실수 x, y가 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} \leq 1$을 만족할 때 $f(x,y) = 2x^2+xy+2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

단답형 문제 답

1번. $\frac{1}{12}\big(5\sqrt{5}-1\big)$

2번. $2\sqrt{5}$

3번. 8

4번. 46

5번. $\sqrt{1+\pi^2}$

6번. $(2,0)$, $(-2,0)$

7번. $2\pi+\dfrac{32}{3}$

8번. $\dfrac{1}{2}$

단답형 문제 풀이

1번. $C'(t)=(1,2t,0)$이므로 $\|C'(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$ 이다. 따라서

$$\int_C f\,ds=\int_0^1 f(C(t))\|C'(t)\|dt=\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt=\left[\frac{1}{12}(1+4t^2)^{3/2}\right]_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$$

이다. □

2번. $C_1(t)=(t,0)$ $(0\le t\le 2)$, $C_2(t)=(2-2t,t)$ $(0\le t\le 1)$, $C_3(t)=(0,t)$ $(0\le t\le 1)$ 이라 두면 $C=C_1+C_2+(-C_3)$이다. C_1과 $-C_3$에서 피적분함수가 0이고, C_2에서 $ds=\|C_2'(t)\|dt=\sqrt{5}\,dt$ 이므로,

$$\begin{aligned}\int_C 3xy(x+2y)ds&=\int_{C_1}3xy(x+2y)ds+\int_{C_2}3xy(x+2y)ds+\int_{-C_3}3xy(x+2y)ds\\&=\int_{C_2}3xy(x+2y)ds\ =12\sqrt{5}\int_0^1(t-t^2)dt=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

이다. □

3번. 삼각함수의 덧셈정리와 대칭성에 의해

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta\\&=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\ d\theta=8\end{aligned}$$

이다. □

4번. $\mathbf{x}(P) = (3,5)$이므로 $\nabla f(3,5) = (5,9)$이다. 연쇄법칙에 의해

$$(f \circ \mathbf{x})_s\,(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\big[f(2s+t, 4s+3t)\big] = \nabla f(2s+t, 4s+3t) \cdot (2,4)$$

이므로, $(f \circ \mathbf{x})_s(P) = \nabla f(3,5) \cdot (2,4) = (5,9) \cdot (2,4) = 46$ 이다. □

5번. $\nabla f(x,y) = (x + y\sin x,\, -\cos x + 2\cos y)$이므로 $\nabla f(\pi, \pi/2) = (\pi, 1)$이다. 점 $(\pi, \pi/2)$에서 f 는 $\nabla f(\pi,\pi/2)$ 방향으로 가장 빨리 증가하므로 $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(\pi,\pi/2)}{\|\nabla f(\pi,\pi/2)\|}$ 이고,

$$D_{\mathbf{u}} f(\pi,\pi/2) = \nabla f(\pi,\pi/2) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\pi,\pi/2)\| = \sqrt{1+\pi^2}$$

이다. □

6번. $\nabla f(x,y) = \Big(xy(y^2+1),\, \dfrac{1}{2}x^2(3y^2+1) + 2y - 2\Big)$이므로, 점 (x,y)가 f 의 임계점이면 다음 연립방정식을 만족한다.

$$xy(y^2+1) = 0, \qquad x^2(3y^2+1) + 4y - 4 = 0.$$

첫 번째 방정식에서 $x = 0$ 이거나 $y = 0$ 이다.

(i) $x = 0$ 이면 두 번째 방정식에서 $y = 1$ 이다.

(ii) $y = 0$ 이면 두 번째 방정식에서 $x = \pm 2$ 이다.

따라서 임계점은 $(\pm 2, 0)$, $(0,1)$이다. $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y(y^2+1) & x(3y^2+1) \\ x(3y^2+1) & 3x^2y+2 \end{pmatrix}$ 이므로,

$$H_f(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

이다. $\det H_f(\pm 2, 0) = -4 < 0$ 이므로 $(\pm 2, 0)$은 안장점이고, $\det H_f(0,1) = 4 > 0$ 이고 $2 > 0$이므로 $(0,1)$은 극소점이다. □

7번. 두 곡선의 교점은 $(-2,0)$과 $(2,0)$이고, 영역 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2,\ x^2 - 4 \le y \le \sqrt{4-x^2}\,\}$는 y축에 대해 대칭이다. 따라서 푸비니 정리에 의해

$$\iint_D (x+1)\,dA = \iint_D dA = \int_{-2}^{2}\int_{x^2-4}^{\sqrt{4-x^2}} dy\,dx = \int_{-2}^{2}\Big(\sqrt{4-x^2} - (x^2-4)\Big)dx$$

이다. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi$ 이고 ($\because$ 반지름이 2인 반원판의 넓이) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = \frac{32}{3}$ 이므로, 답은 $2\pi + \dfrac{32}{3}$ 이다. □

8번. 영역 $D : 0 \le x \le \sqrt[4]{\pi},\ x^2 \le y \le \sqrt{\pi}$ 에 대해

$$\int_0^{\sqrt[4]{\pi}} \int_{x^2}^{\sqrt{\pi}} x\sin(y^2)dydx = \iint_D x\sin(y^2)\,dA$$

이다. 적분영역을 $D : 0 \le y \le \sqrt{\pi},\ 0 \le x \le \sqrt{y}$ 로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt[4]{\pi}} \int_{x^2}^{\sqrt{\pi}} x\sin(y^2)dydx &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\sqrt{y}} x\sin(y^2)dx\right) dy \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{y}{2}\sin(y^2)dy = \Big[-\frac{1}{4}\cos(y^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이다. □

서술형 문제 풀이

9번. $z(x,y)$는 $e^{z(x,y)} - xy(z(x,y)-1) = 0$ 을 만족한다. 이 등식의 양변을 x 로 편미분하면

$$e^{z(x,y)}z_x(x,y) - y(z(x,y)-1) - xyz_x(x,y) = 0 \tag{1}$$

이다. 여기에 $z(1,-1) = 0$ 을 이용하면 $z_x(1,-1) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

등식 (1)의 양변을 x 로 편미분하면

$$e^{z(x,y)}(z_x(x,y))^2 + e^{z(x,y)}z_{xx}(x,y) - 2yz_x(x,y) - xyz_{xx}(x,y) = 0$$

이다. 여기에 $z(1,-1) = 0$ 과 $z_x(1,-1) = \dfrac{1}{2}$ 을 이용하면 $z_{xx}(1,-1) = -\dfrac{5}{8}$ 이다. □

10번. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz$ 라 두자.

(a) 곡면 S 와 평면 $\Pi : x+y+z=1$ 의 교선의 점 (a,b,c)에서

$$\nabla f(a,b,c) = (2a-b, 2b-a-c, 2c-b)$$

는 S 에 접하는 평면의 법선벡터이다. 이 접평면이 Π 와 수직이므로

$$0 = \nabla f(a,b,c)\cdot(1,1,1) = a+c$$

이다. 따라서 $c = -a$ 이다. 한편, 점 (a,b,c)는 연립방정식

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc = 3, \qquad a+b+c = 1$$

을 만족한다. 두 번째 방정식으로부터 $b = 1$ 이고, 이를 첫 번째 방정식에 대입하면 $a^2 = 1$ 이다. 그러므로 $(a,b,c) = (\pm 1, 1, \mp 1)$이다. □

(b) 두 점으로부터 접평면의 방정식

$$\nabla f(1,1,-1)\cdot(x-1,y-1,z+1)=0, \quad \nabla f(-1,1,1)\cdot(x+1,y-1,z-1)=0$$

을 각각 얻는다. 이를 정리하면

$$x+2y-3z=6, \qquad -3x+2y+z=6$$

이다. □

11번. (a) $\nabla f(x,y)=(e^x\sin y,\ e^x\cos y+1)$이므로, 임계점 (x,y)는 연립방정식

$$e^x\sin y=0, \quad e^x\cos y=-1 \quad (x\in\mathbb{R},\ \ 0<y<2\pi)$$

를 만족한다. 첫 번째 방정식으로부터 $y=\pi$ 이고, 이를 두 번째 방정식에 대입하여 $x=0$을 얻는다. 그러므로 임계점은 $(0,\pi)$이다.

(b) $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} e^x\sin y & e^x\cos y \\ e^x\cos y & -e^x\sin y\end{pmatrix}$이므로 $H_f(0,\pi)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$이고, 따라서

$$D^2_{\mathbf{u}}f(0,\pi)=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=-2u_1u_2$$

이다. $u_1=\cos\theta$, $u_2=\sin\theta$로 치환하면 $D^2_{\mathbf{u}}f(0,\pi)=-\sin(2\theta)$이다 $(0\le\theta\le2\pi)$. 따라서 $D^2_{\mathbf{u}}f(0,\pi)$의 최댓값은 1이고, 최솟값은 -1 이다. □

[별해] $\phi(t)=f(\mathbf{p}+t\mathbf{u})=f(tu_1,\pi+tu_2)=e^{tu_1}\sin(\pi+tu_2)+\pi+tu_2$ 라 두고 $D^2_{\mathbf{u}}f(0,\pi)=\phi''(0)$를 이용해도 좋다. ////

12번. $g(x,y,z)=2x-3y-4z$ 라 두고, 평면 $g(x,y,z)=49$에 제한된 함수 f 가 이 평면의 점 (x,y,z)에서 최솟값을 가진다고 하자.

$$\nabla f(x,y,z)=(4x,2y,6z), \qquad \nabla g(x,y,z)=(2,-3,-4)\ne(0,0,0)$$

이므로, 어떤 상수 $\lambda\in\mathbb{R}$ 가 존재하여

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z), \quad \text{즉}, \quad (4x,2y,6z)=\lambda(2,-3,-4)$$

이다. 이로부터 $x=\frac{\lambda}{2}$, $y=-\frac{3\lambda}{2}$, $z=-\frac{2\lambda}{3}$ 이다.

$$49=g(x,y,z)=2x-3y-4z=\frac{49\lambda}{6}$$

이므로 $\lambda=6$ 이고, $(x,y,z)=(3,-9,-4)$이다. 답은 $f(3,-9,-4)=147$ 이다. □

13번. $D_1 \cup D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 2 - x\}$이므로, 푸비니 정리에 의해

$$\begin{aligned}\iint_{D_1 \cup D_2} (x + 2y)dA &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} (x + 2y)dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \Big[xy + y^2 \Big]_{y=x^2}^{y=2-x} dx \\ &= \int_0^1 (4 - 2x - x^3 - x^4)dx \ = \frac{51}{20}\end{aligned}$$

이다. □

14번. (i) $\nabla f(x, y) = (4x + y, x + 4y)$이므로, f 의 임계점 (x, y)는 연립방정식

$$4x + y = 0, \qquad x + 4y = 0$$

을 만족한다. 이로부터 $(x, y) = (0, 0)$이고, $f(0, 0) = 0$ 이다.

(ii) 정의역의 경계 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 을

$$x = 2\cos t, \qquad y = \sqrt{3}\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

로 매개화하면

$$\begin{aligned}f(2\cos t, \sqrt{3}\sin t) &= 8\cos^2 t + 2\sqrt{3}\cos t \sin t + 6\sin^2 t \\ &= 4 + 4\cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t) + 3 - 3\cos(2t) \\ &= \cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t) + 7 \\ &= 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + 7 \quad \left(= 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 7\right)\end{aligned}$$

이다. $\dfrac{\pi}{6} \le 2t + \dfrac{\pi}{6} \le 4\pi + \dfrac{\pi}{6}$ 이므로, 정의역의 경계에서 f 의 최댓값은 9이고, 최솟값은 5이다.

(iii) (i)과 (ii)로부터 f 의 최댓값은 9이고, 최솟값은 0이다. □

[참고] ((ii)의 별해) 편의를 위해

$$g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}$$

이라 두자. 함수 f 가 타원 $g(x, y) = 1$ 의 점 (x, y)에서 극값을 가지면 어떤 상수 $\lambda \in \mathbb{R}$ 가 존재하여

$$(4x + y, x + 4y) = \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) = \lambda\left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{3}\right)$$

이다 ($\because\ \nabla g(x,y) \neq (0,0)$). 따라서 (x,y)는 연립방정식

$$\begin{aligned}\Big(4 - \frac{\lambda}{2}\Big)x + y = 0, \quad \cdots \quad (1)\\ x + \Big(4 - \frac{2\lambda}{3}\Big)y = 0, \quad \cdots \quad (2)\\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \cdots \quad (3)\end{aligned}$$

을 만족한다. 등식 (1)에 의해 $y = \Big(\frac{\lambda}{2} - 4\Big)x$ 이고, 이를 등식 (2)에 대입하면

$$0 = x\left(1 + \Big(4 - \frac{2\lambda}{3}\Big)\Big(\frac{\lambda}{2} - 4\Big)\right) = -\frac{x}{3}(\lambda - 5)(\lambda - 9)$$

이다. $x = 0$ 이면 (1)에 의해 $y = x = 0$ 인데, 이는 (3)을 만족하지 않는다. 따라서 $x \neq 0$ 이다.

$\lambda = 5$ 이면 (1)에 의해 $y = -\dfrac{3x}{2}$ 이므로, (3)에 의해 $x^2 = 1$ 이다. 이 경우에 $(x,y) = \Big(\pm 1, \mp\dfrac{3}{2}\Big)$ 이고, $f\left(\pm 1, \mp\dfrac{3}{2}\right) = 5$ 이다.

$\lambda = 9$ 이면 (1)에 의해 $y = \dfrac{x}{2}$ 이므로, (3)에 의해 $x^2 = 3$ 이다. 이 경우에 $(x,y) = \Big(\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)$ 이고, $f\left(\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9$ 이다. ////