★**단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점, 답이 틀리면 0점)

1번. 멱급수로 정의된 함수 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 가 있을 때, (a) f 의 수렴구간과 (b) f' 의 수렴구간을 각각 구하시오.

2번. 두 평면 $3x - 6y - 2z = 15$ 와 $2x + y - 2z = 5$ 이 만나는 교선에 평행한 벡터들 중에서 y 성분이 2 인 것을 구하시오.

3번. a 와 b 를 실수라고 할 때, $e^{a+bi} = -\sqrt{3} + i,\ \ 0 \le b < 2\pi$ 을 만족하는 복소수 $a + bi$ 를 구하시오. 여기서, $e^{a+bi} = e^a\, e^{bi}$ 로 정의한다.

4번. 삼차원공간 상의 원점 O, 원기둥좌표 $\left(2, -\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ 인 점 P, 그리고 구면좌표 $\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 인 점 Q 로 이루어진 삼각형 $\triangle OPQ$ 의 넓이를 구하시오. 여기서, 원기둥좌표는 (r, θ, z) 로, 구면좌표는 (ρ, ϕ, θ) 로 표현했다.

5번. 함수 $f(x) = \ln(4 - x^2)$ 의 중심이 0 인 Taylor 급수를 구하시오. (주의: 앞의 몇개의 항들만 구해서 쓰면 0점 처리)

6번. 다음 행렬 A 에 대하여 행렬식 $\det(A) = 5$ 일 때, $3x - y - z$ 의 값을 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

7번. $\int \frac{1}{1+x^5} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 를 구하여라. (주의: $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 에서 n 이 1부터 시작됨에 유의)

8번. $|\,2\bar{z} - 1\,| \le |\,z - 3\,|$ 을 만족하는 복소수 z 의 집합을 복소평면에 나타냈을 때, 그 도형의 넓이를 구하시오. 여기서, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수를 의미한다.

★ **서술형**: 9번 - 14번 (문제당 10점, 풀이과정이 반드시 필요하고 이에 대한 가산점 있슴)

9번. $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^{2n}$ 이고 $g(x) = \frac{f(x)}{1+2x+3x^2}$ 라고 하자. 함수 $g(x)$ 의 $x=0$ 에서 Taylor 급수가 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 이라 할 때, 처음 4개의 계수 a_0, a_1, a_2, a_3 을 구하시오.

10번. 점 $(1,2,3)$ 을 지나고, 직선 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{5}$ 과 x-축에 동시에 수직인 직선을 L 이라 했을 때, L 의 매개변수방정식을 구하여라.

11번. 평면 $x - y + z = 5$ 에 수직인 직선들 중에서 한 점 $Q(-2,3,1)$ 에서 거리가 가장 가까운 것을 L 이라고 했을 때, L 의 대칭방정식을 구하고 L 과 평면의 교점 R 을 구하시오.

12번. 점 $P(1,-2,1)$ 와 점 $Q(1,0,2)$ 를 지나는 직선이 평면 $x+y+z=1$ 과 만나는 점을 A, 점 P 를 평면 위에 내린 수선의 발을 P' 라고 두고 $\theta = \angle PAP'$ 라고 할 때, $\cos\theta$ 값을 구하시오. 여기서, $\angle PAP'$ 은 세 점 P, A, P' 의 사잇각을 의미한다.

13번. 직선 $x = \sqrt{3}y$ 와 극방정식으로 주어진 곡선 $r = 1 - 2\cos^2 2\theta$ 의 모든 교점을 극좌표 (r, θ) 로 나타내시오. 단, $r \geq 0$ 인 것으로 구하시오.

14번. $f(x) = e^{x^2}$ 일 때, $f^{(2n)}(0)$ 의 값을 구하여라.

Typeset by LaTeX

단답형(1번-8번)

1번. (a) 비율판정법에 의해 수렴 반경은 1이 됨을 알 수 있다. 이제 경계에서의 수렴성을 알아보기 위해 $x = 1$을 대입하면 p-판정법에 의해 수렴하고, $x = -1$을 대입하면 교대급수 판정법에 의해 수렴한다. 따라서 수렴 구간은 $[-1, 1]$이 된다.

(b) 항별 미분을 통해 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}$이 되고, 마찬가지로 비율판정법에 의해 수렴 반경은 1이 됨을 알 수 있다. 이제 경계에서의 수렴성을 알아보기 위해 $x = 1$을 대입하면 p-판정법에 의해 발산하고, $x = -1$을 대입하면 교대급수 판정법에 의해 수렴한다. 따라서 수렴 구간은 $[-1, 1)$이 된다.

정답: (a) $[-1, 1]$ (또는 $-1 \le x \le 1$), (b) $[-1, 1)$ (또는 $-1 \le x < 1$)

2번. 두평면의 교선을 L이라 하면 L은 두 평면의 법선벡터 $(3, -6, -2)$와 $(2, 1, -2)$에 동시에 수직이다. 따라서, 두 법선벡터의 외적 $(3, -6, -2) \times (2, 1, -2) = (14, 2, 15)$는 두 평면의 교선에 평행한 벡터이다. 여기에 상수배 한 것은 모두 교선에 평행한 벡터이고 이들 중 y 성분이 2인 것은 $(14, 2, 15)$ 뿐이다.

정답: $(14, 2, 15)$

3번. 실수 a, b에 대해 $z = a + bi$로 두면 $e^z = e^a(\cos b + i \sin b) = -\sqrt{3} + i$이다. 그런데, 모든 정수 k에 대해, $-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)\right)$가 성립하고 $e^a > 0$이므로 $e^a = 2$이고 $b = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$가 되어야 한다. 그런데, $0 \le b < 2\pi$를 만족해야 하므로, $k = 0$이어야 한다. 그러므로, $a = \ln 2$이고 $b = \frac{5\pi}{6}$이다.

정답: $\ln 2 + \frac{5\pi}{6} i$

4번. 점 P, Q의 직교좌표는 각각 $P\left(1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, $Q\left(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$이다. 따라서, $\triangle OPQ$의 넓이는 $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\| = \frac{1}{2}\left\|\left(-9, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)\right\| = 2\sqrt{6}$이다.

정답: $2\sqrt{6}$

5번. 양변을 미분하면 $f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{x}{1 - \frac{x^2}{4}} = -\frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n$이고 수렴조건은 $\left|\frac{x^2}{4}\right| < 1$이다. 이 멱급수를 적분하면 $f(x) = C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n\,4^n}$를 얻는다. 여기서 C는 적분상수이다. 양변에 $x = 0$을 대입하면 $C = \ln 4$이다. 그러므로 $f(x) = \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n\,4^n}$이다.

정답: $f(x) = \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n\,4^n}$

6번. $\det(A) = 6x - 2y - 2z = 5$ 이므로 $2(3x - y - z) = 5$ 이고 $3x - y - z = \frac{5}{2}$.

정답: $\dfrac{5}{2}$

7번. $\dfrac{1}{1+x^5} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^5)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n}$ 이므로 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^5}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}x^{5n+1} =$ $C + x - \dfrac{1}{6}x^6 + \dfrac{1}{11}x^{11} - \dfrac{1}{16}x^{16} + \cdots$ 이다. 그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ 이다.

정답: $\dfrac{5}{6}$

8번. $z = x + yi$ 라 두면 $|2(x - yi) - 1| \le |(x + yi) - 3|$ 이므로 양변을 제곱하면 다음을 얻을 수 있다.

$$(2x-1)^2 + (2y)^2 \le (x-3)^2 + y^2$$

이를 정리하면

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 \le \frac{25}{9}$$

이다. 이는 중심이 $(-\frac{1}{3}, 0)$ 이고 반지름이 $\frac{5}{3}$ 인 원의 내부이므로 넓이는 $\frac{25}{9}\pi$ 이다.

정답: $\dfrac{25}{9}\pi$

서술형(9번-14번)

9번. $f(x) = 1 + 4x^2 + 8x^4 + \cdots$ 이고,

$$\begin{aligned}(1+2x+3x^2)g(x) &= (1+2x+3x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots) \\ &= a_0+(2a_0+a_1)x+(3a_0+2a_1+a_2)x^2+(3a_1+2a_2+a_3)x^3+\cdots\end{aligned}$$

이므로, 두 멱급수를 비교하면, $a_0 = 1, \quad 2a_0 + a_1 = 0, \quad 3a_0 + 2a_1 + a_2 = 4, \quad 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$ 이다. 따라서, $a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = -4$ 이다.

10번. $\vec{u} = (1,0,0)$ 과 $\vec{v} = (2,-1,5)$ 는 x축과 주어진 직선에 각각 평행한 벡터이다. L은 x축과 주어진 직선에 모두 수직인 직선이고, 따라서 주어진 두 벡터에 동시에 수직인 벡터로서 $\vec{u} \times \vec{v} = (0,-5,-1)$ 을 선택하면, 직선이 점 $(1,2,3)$ 을 지나므로 직선의 매개변수방정식은

$$x = 1, \quad y = 2 - 5t, \quad z = 3 - t \quad (-\infty < t < \infty)$$

로 쓸 수 있다. 물론, $(0,-5,-1)$ 대신에 이 벡터에 0이 아닌 상수배를 한 벡터를 대신해도 된다.

11번. 평면 $x - y + z = 5$ 에 수직이면서 한 점 $Q(-2,3,1)$ 에서의 거리가 0인 직선이 L 이다. 다시 말해 벡터 $(1,-1,1)$ 방향이고 $Q(-2,3,1)$ 를 지나는 직선이 L 이고 그 대칭방정식은

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

이다. 따라서 직선 L과 평면 $x - y + z = 5$ 이 만나는 점은 L의 매개변수 방정식 $x = -2 + t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + t$ 를 평면의 방정식에 대입하면 $t = 3$ 을 얻는다. 따라서 구하는 교점은 $R(1,0,4)$ 이다.

12번. 점 P, Q 를 지나는 직선의 매개변수 방정식은 $x = 1$, $y = -2 + 2t$, $z = 1 + t \quad (-\infty < t < \infty)$ 이므로, 평면과 만나는 점은 $A\left(1, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 이고 $\overrightarrow{AP} = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ 이 된다. 또한 점 P의 평면상에 내린 수선의 발인 P' 에 대해, $\overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AP} - proj_{\vec{n}}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} - \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ 을 얻는다. 그러므로 $\cos(\angle PAP') = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP'}}{\|\overrightarrow{AP}\|\|\overrightarrow{AP'}\|} = \frac{2}{\sqrt{10}}$ 이다.

13번. 두 가지의 경우로 나누어 생각한다: (1) $r \neq 0$ 인 경우 (2) $r = 0$ 인 경우.

(1) $x = \sqrt{3}y$ 로 부터 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로, 모든 정수 k에 대해, $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 이다. 그런데 이들 θ가 $r = 1 - 2\cos^2(2\theta)$ 를 만족하는 극좌표(r,θ) 를 찾아야 하므로 $r = 1 - 2\cos^2 2\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 1 - 2\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 에 의해 $r = \frac{1}{2}$ 이다. 그러므로 모든 정수 k에 대해,

극좌표 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$ 이 교점이다. 그런데 r이 같을 경우 2π만큼 차이나는 극좌표는 모두 같은 점을 나타내므로 이 경우 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$ 의 서로 다른 두개의 극좌표 교점 만 있다.

(2) $r = 0$인 경우

(극방정식을 만족시켜야 한다는 관점) 모든 정수 n에 대해, $4\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$이면 극좌표$(0, \theta)$는 $r = 1 - 2\cos^2(2\theta)$를 만족하고 동시에 $x = \sqrt{3}y$ 또한 만족한다. 이 경우 엄밀하게는 $(0, \frac{\pi}{8} + \frac{n}{4}\pi)$, $n = 0, 1, 2, 3$의 4개의 극좌표 교점이 존재하는데, 모두가 같은 하나의 점을 나타내므로 $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ 이 극좌표 교점이 된다.

(교점의 표현만 극좌표로 하는 관점) 이경우 직교좌표 $(0, 0)$ 이 교점이 된다는 사실을 알고 있기 때문에 극좌표 $(0, 0)$ 이 비록 극방정식은 만족하지 않지만 직교좌표 $(0, 0)$ 을 나타낸다. 따라서, 교점의 극좌표는 $(0, 0)$ 을 포함한 $(0, \theta)$가 모두 가능하다.

따라서, $r = 0$인 경우, 위의 두가지 경우를 모두 해답 인정.

14번. t변수의 지수함수 e^t를 $t = 0$에서 Taylor 급수전개 한 후에 이 급수의 수렴반경이 무한대이므로 $t = x^2$을 대입하면,

$$f(x) = e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k}$$

이 된다. 중심이 $x = 0$인 이 급수의 x^m 항의 계수는 Taylor 급수의 m번째 계수에 해당하므로 $\frac{f^{(m)}(0)}{m!}$로 계산된다. 따라서, $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$는 x^{2n}의 계수이어야 한다. 그러므로, $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{1}{n!}$이고 $f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$.