★**단답형** 1번 - 7번 (문제당 5점이고 답이 틀리면 0점)

1번. $f(x) = \frac{x^2-1}{x} \sin \frac{x}{x^2-1}$일 때, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3} f(x) + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} f(x) + \lim_{x\to 1} f(x)$ 의 값을 구하시오.

2번. 주어진 실수 β에 대하여 방정식 $x\,e^{x+1} = \beta$의 근의 갯수를 $n(\beta)$ 라고 할 때, $\int_{-1}^{1} y(1-y^2)\,n(y)\,dy$를 구하시오.

3번. $x > 0,\ y > 0$ 범위에서 $y = x^y$을 만족하는 x들 중 가장 큰 값을 구하시오.

4번. 다음 급수들의 수렴/발산을 밝히시오.(답 세개가 모두 맞을 때 5점)

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n + n!} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)^n$

5번. $\alpha < 1$일 때, 특이적분 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$의 값을 계산하시오.

6번. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$일 때, $x \ge 0$인 영역에서 $y = 0$인 직선, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 그리고 직선 $y = x\tan\theta$로 둘러싸인 영역을 x축 중심으로 회전시킬 때 생기는 입체의 부피를 $1 - \cos\theta$ 로 나눈 값을 구하시오.

7번. 특이적분 $\int_0^1 (x-1)\,e^{-x} \ln x\,dx$를 계산하시오.

★ **서술형**: 8번 - 12번 (풀이과정에 대한 가산점 있습)

8번. (5점) 연속함수 $f : [0,1] \to [0,1]$에 대해서 $f(c) = c$ 를 만족하는 c가 $[0,1]$ 안에 존재함을 증명하여라.

9번. (10점) 연속함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$가 열린구간 $(0,1)$에서 $0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$을 만족하고 $f(1) - f(0) = \frac{1}{2}$일 때, $f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1)$ 값을 구하시오. 여기서, $\mathbb{R}$은 실수 전제의 집합을 나타낸다.

10번. (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$이 조건수렴/절대수렴/발산을 판별하시오.

11번. (10점) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot + \frac{1}{n-1}}{n\sqrt{n}}$ 의 수렴/발산을 판별하시오.

12번. (10점) 특이적분 $\int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{1 + x^3}\,dx$ 수렴/발산을 판별하시오.

단답형(1번-7번)

1번. $h(x) \equiv \frac{x}{x^2-1}$ 라고 두면, $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{h(x)} = 0$ 이고 $f(x) = \frac{\sin h(x)}{h(x)}$ 이므로 $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ ($\because 0 \le |f(x)| \le \frac{1}{|h(x)|}$), $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ ($\because \lim_{x\to\infty} h(x) = 0$).

정답: $\dfrac{5}{6}$

2번. $f(x) = x\,e^{x+1}$라고 하면 $f'(x) = (x+1)\,e^{x+1}$이므로 $x < -1$범위에서 $f(x) < 0$ 이고 $f(x)$는 미분가능한 함수로서 단조감소하고 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$이다. 한편, $x > -1$경우에는$f(x)$는 미분가능한 함수로서 단조증가하며 $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. 그 결과로 $f(-1) = -1$이 최솟값이 되고 $\beta = -1$, $-1 < \beta < 0$, $0 \le \beta \le 1$의 각 경우에 차례로 $n(\beta) = 1, 2, 1$ 값들을 갖는다. 함수 $n(y)$는 $y = -1, 0$에서 불연속이지만 $y(1-y^2)\,n(y)$는 연속함수가 된다. $\int_{-1}^{1} y(1-y^2)\,n(y)\,dy = \int_{-1}^{0} 2\,y(1-y^2)\,dy + \int_0^1 y(1-y^2)\,dy = \int_{-1}^{0} y(1-y^2)\,dy$.

정답: $-\dfrac{1}{4}$

3번. 음함수 $y = x^y$로 부터 양변을 y변수로 미분해서 정리하면 $\frac{dx}{dy} = (1 - \ln y)\,y^{\frac{1}{y}-1}$이므로 $0 < y < e$ 에서 x는 단조증가이고 $y > e$ 에서 x는 단조감소한다. 따라서 $y = e$에서 x는 최대이다.

정답: $e^{\frac{1}{e}}$

4번. (a) 비판정법: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0 \cdot e = 0 < 1$. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$는 (수렴)

(b) 비교판정법: $0 < \frac{n^n}{3\,n!} = \frac{n^n}{2\,n! + n!} \le \frac{n^n}{2^n + n!}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$은 비판정법에 의해 발산. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n+n!}$는 (발산)

(c) 근판정법: $a_n = (\sqrt[n]{3} - 1)^n$이고 $a_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{3} - 1 \to 0 < 1$. (수렴)

정답: (a) 수렴 (b) 발산 (c) 수렴

5번. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = -\int_0^\infty t\,e^{-(1-\alpha)t}\,dt$ ($t = -\ln x$ 로 치환). 부분적분하면 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

정답: $-\dfrac{1}{(\alpha-1)^2}$

6번. 회전체의 부피를 $V(\theta)$라고 하면 $V(\theta) = \int_0^{\cos\theta} \pi\,x^2\,\tan^2\theta\,dx + \int_{\cos\theta}^1 \pi(1-x^2)\,dx = \frac{\pi}{3}\left[\sin^2\theta\cos\theta + 3(1-\cos\theta) - (1-\cos^3\theta)\right] = \frac{2}{3}\pi(1-\cos\theta)$.

정답: $\dfrac{2}{3}\pi$

7번. 부분적분이용: $\int (x-1)\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + C$를 이용하면 $\int_0^1 (x-1)e^{-x}\ln x\,dx = \int_0^1 (-xe^{-x})'\ln x\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1}$.

정답: $1 - \dfrac{1}{e}$

서술형(8번-12번)

8번. $g(x) \equiv f(x) - x$로 두면, $g(0) = f(0)$이고 $g(1) = f(1) - 1$이다. 만일 $f(0) = 0$ 이거나 $f(1) = 1$이면, 증명이 끝난다. 그렇지 않은 경우, $0 \le f(x) \le 1$이기 때문에 $f(0) > 0$ 이고 $f(1) < 1$이 되고, $g(1) < 0 < g(0)$가 성립한다. $f(x)$와 함수 x는 연속함수이므로 $g(x)$ 역시 유한의 닫힌구간 $[0,1]$ 상에서 연속이라서 연속함수의 사잇값정리에 의해 $g(c) = 0$인 $0 < c < 1$가 존재한다.

9번. $0 < x < 1$인 임의의 x에 대하여, 평균값정리에 의해 $f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0)$인 c_x $(0 < c_x < x)$가 존재하므로, $x > 0)$인 사실과 $0 \le f'(c_x) < \frac{1}{2}$를 이용하면 $f(x) - f(0) \le \frac{1}{2}x$가 성립한다. 같은 방식으로 $f(1) - f(x) \le \frac{1}{2}(1-x)$을 얻는다. 따라서, 종합하면 $f(1) - \frac{1}{2}(1-x) \le f(x) \le \frac{1}{2}x + f(0)$이 성립하고 결국 $f(1) - \frac{1}{2} \le f(x) - \frac{1}{2}x \le f(0)$을 얻는다. 그런데, 가정으로 부터 $f(1) - \frac{1}{2} = f(0)$ 이므로 $f(x) = \frac{1}{2}x + f(0)$가 된다. 그러므로 $f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1) = 0$이다.

10번. 우선 $a_n = \frac{\ln n}{n - \ln n}$라 두면, a_n은 양수($a_n \ge 0$)이면서 단조감소한다. ($\because f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$ 라고 둘 때, $x > e$ 에서 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} < 0$) 그리고 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n - \ln n} = 0$이므로 교대급수 수렴정리에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$는 수렴. 한편, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n - \ln n} = 1$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$가 발산($\because$ 비교판정법: $0 \le \frac{1}{n} \le \frac{\ln n}{n}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 이 발산) 이므로 극한비교판정법에 의해 양항급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다. 따라서, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$ 는 조건수렴한다.

11번. 로그함수의 정의 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ 과 $\frac{1}{t}$ 그래프를 이용하면, $n \ge 2$ 인 자연수일 때, 다음부등식을 얻는다.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

이로부터 또한 다음의 부등식을 얻는다.

$$\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} < \ln n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \ln n + 1$$

이부등식에 $n\sqrt{n}$ 을 나누어 정리하면 $n \ge 3$일 때

$$0 < \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} < \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}}{n\sqrt{n}} < \frac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}} \le 2\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$$

따라서, 비교판정법에 의해 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ 의 수렴/발산을 조사하면 된다. 한편, $\epsilon > 0$ 에 대해, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\epsilon}} = 0$라는 사실로 부터, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\epsilon}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\epsilon}} = 0$. 그런데, $\frac{3}{2} - \epsilon > 1$이므로 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\epsilon}}$ 가 수렴. 따라서, 극한비교판정법에 의해 주어진 급수는 수렴.

12번. $x > 1$ 일 때, $0 \leq \dfrac{x\ln x}{1+x^3} < \dfrac{x\ln x}{x^3} = \dfrac{\ln x}{x^2}$. 그런데, $t = \ln x$를 치환하여 치환적분을 사용하면 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^{\ln M} t\,e^{-t}\,dt = 1$. 따라서, $M > 1$에 대하여 $\displaystyle\int_1^M \frac{\ln x}{x^2}\,dx \leq 1$이고 $\displaystyle\int_1^M \frac{\ln x}{x^2}\,dx$은 M이 증가함에 따라 증가하므로 단조증가 함수에 대한 수렴정리로 부터 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$는 수렴.