일반수학1(MTH1001) 기말시험

2024년 6월 17일 (월) 18:00 – 19:40

반드시 다음의 주의 사항을 읽고 난 후 문제를 푸시오.

- **부정행위는 절대 금함.**
- **이름과 학번은 답안지의 1면과 3면에 볼펜으로 기입할 것.**
- **50분이 지나기 전에는 퇴실하지 말 것.**
- **계산기 및 기타 연습장은 사용하지 말 것.**

★ **단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점, 옳은 답이 아닐 경우 0점, 부분점수 없음)

1. 멱급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{n\,5^n}$ 의 수렴구간을 구하시오.

2. $x = \dfrac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x) = \dfrac{1}{(1-\cos x)^2}$ 의 3차 테일러 다항식을 구하시오.

3. 극좌표로 주어진 두 곡선

$$r = 1 - 3\cos\theta, \qquad r = \frac{2}{2+\cos\theta}$$

의 교점들을 모두 직교좌표로 나타내시오.

4. 구면좌표로 표현된 방정식

$$\rho\cos(2\phi) = 2\sin\phi\sin\theta + 2\cos\phi$$

을 직교좌표로 나타내시오.

5. 벡터 $(1,-2,3)$을 세 벡터

$$\mathbf{u} = (3,-1,-2), \qquad \mathbf{v} = (-2,3,1), \qquad \mathbf{w} = (2,-1,-3)$$

의 일차결합으로 표현하시오.

6. 평행한 두 평면 $4x - y + 8z = 2$과 $4x - y + 8z = -4$ 사이의 수직거리를 구하시오.

7. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 일 때, A^{2024}을 구하시오.

8. 이차 방정식

$$z^2 - \left(\frac{8-6i}{1-2i}\right) z + \frac{10}{1-2i} = 0$$

을 만족하는 서로 다른 두 개의 복소수 z를 각각 $a+bi$ 형태로 표현하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$이고, a와 b는 실수이다.)

★ **서술형** 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점, 풀이 과정 부분점수 있음)

9. $|x| < 1$일 때 $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 임을 이용하여, 급수 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{3^n}$ 의 값을 구하시오.

10. 함수

$$f(x) = x\arctan x$$

의 매클로린 급수를 이용하여 $f^{(20)}(0)$를 구하시오.

11. 원기둥좌표로 주어진 영역

$$R = \left\{ (r,\theta,z) \;\middle|\; r^2 + 2z^2 \le 2r\cos\theta, \quad 0 \le z \le \frac{1}{2} \right\}$$

의 부피를 구하시오.

12. 두 점 $A(-1,-3,3)$와 $B(2,5,-2)$를 지나는 직선을 ℓ이라 하자. 원점 O에서 직선 ℓ에 내린 수선의 발을 P라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{OP}$의 외적 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{OP}$를 구하시오.

13. 주어진 부등식

$$\left| \frac{z-1+2i}{\bar{z}+2+i} \right| \le \frac{1}{2}$$

을 만족하는 복소수 z의 집합을 복소평면에 나타냈을 때 만들어지는 영역의 넓이를 구하시오.

14. 어떤 실수 k에 대하여 공간 상에 서로 다른 네 점

$$A(1,0,1), \quad B(k,-2,-1), \quad C(4,k,2), \quad D(-1,2,k)$$

가 한 평면 위에 있을 때, 네 점 A, B, C, D를 포함하는 평면의 방정식을 구하시오.

1번 정답. $(-3,7]$ (또는 $-3 < x \le 7$) $\square$

2번 정답. $1-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{11}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3$ $\square$

3번 정답. $(0,1),\ (0,-1),\ (-2,0)$ $\square$

4번 정답. $z^2-x^2-y^2=2y+2z$ (또는 $x^2+(y+1)^2=(z-1)^2$) $\square$

5번 정답. $\mathbf{u}-\mathbf{v}-2\mathbf{w}$ $\square$

6번 정답. $\frac{2}{3}$ $\square$

7번 정답.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

8번 정답. $1+i,\ 3+i$ $\square$

9번 풀이. 주어진 등식

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

의 양변을 x에 대해 2번 미분한 후 x^2 곱해도, $|x|<1$일 때 성립한다.

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)=x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d^2}{dx^2}x^n\right)$$
$$\implies \frac{2x^2}{(1-x)^3}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)x^n$$

여기에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{3^n}=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{3}{4}$$

을 얻을 수 있다. $\square$

10번 풀이. 구간 $x\in(-1,1)$에서

$$\frac{d}{dx}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

이므로 양변을 적분하고 x를 곱하면, $f(x)$의 매클로린 급수는 다음과 같다.

$$x\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

양변의 x^{20}의 계수가 같으므로, $n=9$이고 $k=20$에서 다음이 성립한다.

$$\frac{(-1)^9}{2\times 9+1}=\frac{f^{(20)}(0)}{20!}$$

그러므로 $f^{(20)}(0)=-\frac{20!}{19}=(-20)\times 18!$이다. $\square$

11번 풀이.

$$x^2+y^2+2z^2\le 2x,\quad 0\le z\le\frac{1}{2}$$
$$\implies (x-1)^2+y^2\le 1-2z^2,\quad 0\le z\le\frac{1}{2}$$

영역 R을 평면 $z=t$로 자른 단면은 중심이 $(1,0,t)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{1-2t^2}$인 원이 된다. 회전체의 부피 공식에 의하여, R의 부피는

$$\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t^2)\,dt=\pi\left[t-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{12}\pi$$

이다. $\square$

12번 풀이. $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AP}$는 평행하므로 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=\mathbf{0}$이다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}\\&=(3,8,-5)\times(-1,-3,3)=(9,-4,-1)\end{aligned}$$

그러므로 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OP}=(9,-4,-1)$이다. $\square$

12번 별해. 어떤 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ 이므로,

$$\overrightarrow{OP}=(-1+3t,-3+8t,3-5t)$$

이다. $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{OP}$는 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ 이다.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=(3,8,-5)\cdot(-1+3t,-3+8t,3-5t)=-42+98t=0$$

그러므로 $t=\frac{3}{7}$이고 $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$이다.
따라서 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OP}=(3,8,-5)\times\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)=(9,-4,-1)$이다. $\square$

13번 풀이. $z=x+yi$라 하자. 주어진 부등식은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}&4\left|x+yi-1+2i\right|^2\le\left|x-yi+2+i\right|^2\\\implies\ &4(x-1)^2+4(y+2)^2\le(x+2)^2+(1-y)^2\\\implies\ &3(x^2+y^2-4x+6y+5)\le 0\\\implies\ &(x-2)^2+(y+3)^2\le 8\\\implies\ &|z-2+3i|\le 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

그러므로 복소수 z의 집합은 복소평면에서 $2-3i$를 중심으로 반지름이 $2\sqrt{2}$인 원으로 나타내어진다. 따라서 이 도형의 넓이는 8π 이다. $\square$

14번 풀이. $\overrightarrow{AB}=(k-1,-2,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(3,k,1)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,2,k-1)$ 가 이루는 평행육면체의 부피는 0이다.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})&=\det\begin{pmatrix}k-1 & 3 & -2\\ -2 & k & 2\\ -2 & 1 & k-1\end{pmatrix}\\&=k^3-2k^2+k-12\\&=(k-3)(k^2+k+4)=0\end{aligned}$$

그러므로 $k=3$이고, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,-8,12)$이다.
점 $A(1,0,1)$을 지나고 벡터 $(1,-2,3)$에 수직인 평면의 방정식은

$$(x-1)-2y+3(z-1)=0\quad\implies\quad x-2y+3z=4$$

이다. $\square$