일반수학1(MTH1001) 중간시험

2024년 4월 22일 (월) 18:00 – 19:40

반드시 다음의 주의 사항을 읽고 난 후 문제를 푸시오.

- **부정행위는 절대 금함.**
- **이름과 학번은 답안지의 1면과 3면에 볼펜으로 기입할 것.**
- **50분이 지나기 전에는 퇴실하지 말 것.**
- **계산기 및 기타 연습장은 사용하지 말 것.**

★ **단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점, 옳은 답이 아닐 경우 0점, 부분점수 없음)

1. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 8}{3}$$

을 만족할 때, 극한 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

2. 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음과 같이 정의될 때,
극한 $\lim_{x\to 4} (g\circ f)(x)$의 값을 구하시오.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & (x\text{가 유리수}) \\ 6 - x & (x\text{가 무리수}) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & (x\text{가 정수}) \\ 2x + 3 & (x\text{가 정수가 아님}) \end{cases}$$

3. $x = 9$ 근방에서 함수 $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} \quad (x \geq 0)$의 일차근사식을 이용하여

$$\sqrt{1+\sqrt{9.096}}$$

의 근삿값을 구하시오.

4. 다음 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하시오.

$$f(x) = \cos(\arcsin x) \quad (|x| < 1)$$

5. 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{3n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3n^2+n^2}} \right)$$

6. 다음 정적분을 구하시오.

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$$

7. 다음 특이적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt[3]{|x^2-1|}} \, dx$$

8. 다음 급수 중 수렴하는 것을 모두 고르시오.

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (B) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n \ln n}$

(C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n+2}\right)^n$ (D) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

★ **서술형** 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점, 풀이 과정 부분점수 있음)

9. 방정식 $x^3 = \dfrac{1}{2x+1}$은 적어도 두 개의 실근을 가짐을 보이시오.

10. 매개변수 t에 대하여

$$x = \frac{t}{t+1}, \qquad y = t^2 + 1$$

일 때, 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$와 이계도함수 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$를 t에 대한 식으로 나타내시오.

11. 음함수 $x^2 + 3xy + y^2 + y^3 = 1$로 주어진 함수 $y = f(x)$가 있다. 곡선 위의 점 $(1, 0)$에서 $f(x)$의 2계 미분계수를 구하시오.

12. 곡선 $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $(0 < x \leq 1)$과 세 직선 $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$으로 둘러싸인 부분을 y축을 중심으로 회전시켜 얻은 입체의 부피를 구하시오.

13. 다음에 주어진 급수가 수렴하는 p의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{n^3+1} \right)^p$$

14. 다음 부등식을 증명하시오. (참고. $\sqrt{2025} = 45$)

$$88 < \int_0^{2024} \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} \, dx < 89$$

1번 정답. 4 □

2번 정답. 7 □

3번 정답. 2.004 (또는 $\frac{501}{250}$) □

4번 정답. $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ □

5번 정답. $4-2\sqrt{3}$ □

6번 정답. $\frac{3}{8}\pi$ □

7번 정답. $\dfrac{15}{4}$ □

8번 정답. (A), (C), (D) □

9번 풀이. $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2x+1}$ 이라 하자. $f(x)$는 $x \neq -\dfrac{1}{2}$에서 연속이다.

$$f(-1)=(-1)^3-\frac{1}{2\times(-1)+1}=0$$
$$f(0)=0^3-\frac{1}{2\times 0+1}=-1<0$$
$$f(1)=1^3-\frac{1}{2\times 1+1}=\frac{2}{3}>0$$

사이값 정리에 의하여 구간 $[0,1]$ 사이에 하나의 근이 존재하고, $f(-1)=0$ 이므로 -1은 또 다른 실근이다. □

10번 풀이. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{(t+1)^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=2t(t+1)^2$$

이다. $\dfrac{d\frac{dy}{dx}}{dt}=2(3t+1)(t+1)$ 이므로,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{d\frac{dy}{dx}/dt}{dx/dt}=2(3t+1)(t+1)^3$$

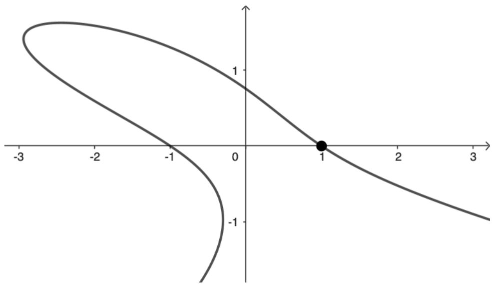
이다. □

10번 별해. $t=\dfrac{x}{1-x}$ 이므로 $y=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2+1$ 이다. 그러므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{(1-x)^3}=2t(t+1)^2$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4x+2}{(1-x)^4}=2(3t+1)(t+1)^3$$

이다. □

11번 풀이. 주어진 식의 양변을 x로 미분한 식과 두 번 미분한 식에 각각 $x=1$, $y=0$을 대입한다.



$$x^2+3xy+y^2+y^3=1$$
$$2x+3y+3xy'+2yy'+3y^2y'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{2}{3}$$
$$2+6y'+3xy''+2(y')^2+2yy''+6y(y')^2+3y^2y''=0 \quad\Rightarrow\quad y''=\frac{10}{27}$$

따라서 점 $(1,0)$에서 $f(x)$의 2차 미분계수는 $\dfrac{10}{27}$이다. □

12번 풀이. $y^2=\dfrac{1-x^2}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}-1$이므로, $x^2=\dfrac{1}{1+y^2}$ 이다.

$$\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,dy=\pi\left[\arctan(y)\right]_0^1=\frac{\pi^2}{4}$$

그러므로 회전체의 부피는 $\dfrac{\pi^2}{4}$이다. □

13번 풀이. 자연수 n에 대하여 $a_n=\left(\frac{\sqrt{n}-1}{n^3+1}\right)^p$, $b_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}p}$이라 하자.
$n>1$에 대하여 $a_n>0$이고 $b_n>0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt{n}-1}{n^3+1}\right)^p}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5p}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-n^2\sqrt{n}}{n^3+1}\right)^p=1>0$$

이므로, **극한비교판정법**에 의하여, 급수 $\sum a_n$이 수렴하는 p의 범위는 $\sum b_n$이 수렴하는 p의 범위와 같다. p**급수 판정법**에 의하여, 급수 $\sum b_n$은 $\dfrac{5p}{2}>1$일 때 수렴하고, $\dfrac{5p}{2}\le 1$일 때 발산한다.
따라서 주어진 급수 $\sum a_n$이 수렴하는 범위는 $p>\dfrac{2}{5}$이다. □

14번 풀이. $\sqrt{2025}=45$이다.
(상한) $\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$은 감소함수이므로, 정적분과 급수는 다음 부등식을 만족한다.

$$\int_0^{2024}\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\,dx<\sum_{n=0}^{2023}\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\sum_{n=0}^{2023}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$$
$$=\sqrt{2025}+\sqrt{2024}-\sqrt{1}-\sqrt{0}<89$$

(하한) 양의 실수 x에 대하여 $\sqrt{x}$가 위로 볼록이므로

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{2}<\sqrt{x+1}$$

이 성립하고, 다음 부등식도 성립한다.

$$\int_0^{2024}\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\,dx>\int_0^{2024}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$
$$=\left[2\sqrt{x+1}\right]_0^{2024}=2\sqrt{2025}-2\sqrt{1}=88$$

그러므로 $88<\displaystyle\int_0^{2024}\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\,dx<89$ 가 성립한다. □

참고. 적분식의 근삿값은 다음과 같다.

$$\int_0^{2024}\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}\,dx=\frac{2}{3}\left[(x+2)\sqrt{x+2}-x\sqrt{x}\right]_0^{2024}$$
$$=\frac{2}{3}\left(2026\sqrt{2026}-2024\sqrt{2024}-2\sqrt{2}\right)$$
$$\approx 88.114381002341$$