일반수학2(MTH1002) 기말시험

2024년 12월 16일 (월) 18:00 – 19:40

반드시 다음의 주의 사항을 읽고 난 후 문제를 푸시오.

– 부정행위는 절대 금함.	**– 50분이 지나기 전에는 퇴실하지 말 것.**
– 이름과 학번은 <u>답안지의 1면과 3면</u>에 볼펜으로 기입할 것.	**– 계산기 및 기타 연습장은 사용하지 말 것.**

★ **단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점, 옳은 답이 아닐 경우 0점, 부분점수 없음)

1. xy 평면에서 두 직선 $x = 1$, $y = 0$과 포물선 $y = x^2$으로 둘러싸인 유계영역을 R이라고 할 때, R에서 정의된 함수 $f(x, y) = 4 - y$의 그래프 아래에 있고 xy 평면 위에 있는 삼차원 영역의 부피를 구하시오.

2. 좌표공간의 영역 D가

$$D = \{(x, y, z) \ \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$$

일 때, 다음 삼중적분의 값을 구하시오.

$$\iiint_D z^2 \, dxdydz$$

3. xy 평면 위의 그래프 $y = e^x$ $(0 \le x \le 1)$을 y축을 중심으로 한 바퀴 회전한 곡면을 X라고 하면, 곡면 X를 매개변수를 이용하여 표현하시오. (단, 매개변수의 범위까지 명확히 표현하시오.)

4. 다음 매개변수 곡면 위의 점 $P(5, 1, 4)$에서 접평면의 방정식을 구하시오. (단, $ax + by + cz = d$의 형태로 답안을 표현하시오.)

$$X(u, v) = \big(u - v,\ u + v,\ v^2\big)$$

5. 곡면 $z = x^2 - y^2$ 중에서 $1 \le x^2 + y^2 \le 2$를 만족하는 부분을 S라고 할 때, 곡면 S의 넓이를 구하시오.

6. 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y^2,\ 4xyz,\ x^3 - yz)$$

에 대하여, $\mathbf{F}$의 회전(**curl**)을 구하시오.

7. 미분가능한 실함수 $f(x, y, z)$는

$$\nabla f = \big(2xyz\cos(x^2),\ \ z\sin(x^2) - 2yz,\ \ y\sin(x^2) - y^2 + 6z\big)$$

를 만족한다. $f(0, 0, 0) = 1$일 때 $f(1, 1, 1)$를 구하시오.

8. xy평면에서 D는 두 포물선

$$y - x^2 + 1 = 0, \quad y + x^2 - 4x + 1 = 0$$

으로 둘러싸인 유계 영역이다. 이 때, 다음 선적분의 값을 구하시오.

$$\int_{\partial D} \big(e^{\sin x} + 2\pi xy\big)\, dx + \big(4x^2 - e^y \cos y\big)\, dy$$

★ **서술형** 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점, 풀이 과정 부분점수 있음)

9. 좌표공간에서 $O(0, 0, 0)$, $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 1, 1)$을 꼭지점으로 하는 사면체의 경계와 내부영역을 D라고 할 때,

$$\iiint_D 2x \, dV$$

를 구하시오.

10. xy 평면에서 D는 다음의 네 직선으로 둘러싸인 영역이다.

$$y = x, \quad y = x + 4, \quad y = -x, \quad y = -x + 2$$

이 때, **이중적분의 변수변환 공식**을 사용하여 다음의 적분값을 구하시오.

$$\iint_D (x - y)e^{x^2 - y^2} \, dxdy$$

11. 좌표공간에서 C는 점 $P(1, 0, 0)$에서 출발하여 직선을 따라 $Q(2, 3, 2)$에 도착하는 곡선이다. 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2,\ x - y,\ -z^2)$$

에 대하여 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$의 값을 구하시오.

12. 좌표공간에서 유향곡면 S는 $x^2 + y^2 = 4$를 만족하는 원기둥면 중에서 $0 \le z \le 4 - x$를 만족하는 부분이고, S의 향은 $\mathbf{n} \cdot (x, y, z) \le 0$으로 주어졌다. 그리고, 벡터장 $\mathbf{F}$는 다음과 같다.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy,\ -x^2 + y,\ e^z)$$

이 때, 곡면 S를 매개변수로 이용하여 표현하고, 면적분 $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$의 값을 구하시오.

13. 좌표공간에서 D는 포물면 $z = x^2 + y^2$과 평면 $z = 2x$로 둘러싸인 영역이고, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z\sin y,\ e^x - y^2 + 1,\ 2yz + 5z)$$

일 때, D의 경계 ∂D를 통한 벡터장 $\mathbf{F}$의 유량 $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$를 **발산정리를 사용**하여 구하시오. (단, $\mathbf{n}$은 ∂D의 외향 단위법선벡터장이다.)

14. 유향곡면 S는 평면 $x + z = 5$에서 $x^2 + y^2 \le 1$인 부분이다. 이 때, S의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \ge 0$으로 주어졌다. 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz,\ -xy,\ 3y)$$

에 대하여 $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$를 **스토크스 정리를 사용**하여 구하시오.

*1*번 답. $\dfrac{37}{30}$ $\square$

*2*번 답. $\dfrac{31}{15}\pi$ $\square$

*3*번 답. $X(t,\theta)=\big(t\cos\theta,\ e^t,\ t\sin\theta\big)\quad(0\le t\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ $\square$

*4*번 답. $2x-2y-z=4$ $\square$

*5*번 답. $\dfrac{\pi}{6}\left(27-5\sqrt{5}\right)$ $\square$

*6*번 답. $\big(-z-4xy,\ -3x^2,\ 4yz+2y\big)$ $\square$

*7*번 답. $\sin 1+3$ $\square$

*8*번 답. $\dfrac{16}{3}(4-\pi)$ $\square$

*9*번 풀이. 공간에서 O, P, R을 포함하는 평면의 방정식은 $z=y$이고, xy평면에서 P, Q를 지나는 직선의 방정식은 $x+y=1$이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\iiint_D 2x\ dV &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{y} 2x\ dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x}2xy\ dydx\\ &=\int_0^1 x(1-x)^2dx=\int_0^1\left(x-2x^2+x^3\right)dx\\ &=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

이다. $\square$

*10*번 풀이. $u=x+y$, $v=-x+y$로 변수 변환하면,
$x=\dfrac{1}{2}(u-v)$, $y=\dfrac{1}{2}(u+v)$, $(0\le u\le 2,\ 0\le v\le 4)$이고

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2},\quad dxdy=\frac{1}{2}dudv$$

이다.

$$\begin{aligned}\iint_D(x-y)e^{x^2-y^2}\ dxdy&=\frac{1}{2}\int_0^4\int_0^2 -ve^{-uv}dudv=\frac{1}{2}\int_0^4\left(e^{-2v}-1\right)dv\\ &=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-8}+1\right)-4\right]=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^8}+7\right)\end{aligned}$$

$\square$

*11*번 풀이. 주어진 곡선(직선)을 매개변수로 표현하면,

$$C(t)=(t+1,\ 3t,\ 2t)\quad(0\le t\le 1)$$

이고, $C'(t)=(1,3,2)$이므로

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds&=\int_0^1\left(9t^2,-2t+1,-4t^2\right)\cdot(1,3,2)dt\\ &=\int_0^1\left(t^2-6t+3\right)dt=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

이다. $\square$

*12*번 풀이. 원기둥면 S를 매개화하면 다음과 같고,

$$X(\theta,z)=(2\cos\theta,2\sin\theta,z),\quad(0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 4-2\cos\theta)$$

$$X_\theta=(-2\sin\theta,2\cos\theta,0),\quad X_z=(0,0,1)$$

$$X_\theta\times X_z=(2\cos\theta,2\sin\theta,0),\quad \mathbf{n}dS=\pm(X_\theta\times X_z)\,dzd\theta$$

이다. $\mathbf{n}\cdot(x,y,z)\le 0$이므로, $\mathbf{n}dS=-(X_\theta\times X_z)\,dzd\theta$이다. 따라서,

$$\begin{aligned}\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS&=-\int_0^{2\pi}\int_0^{4-2\cos\theta}4\sin^2\theta\ dzd\theta\\ &=-\int_0^{2\pi}4\sin^2\theta\,(4-2\cos\theta)\ d\theta=-16\pi\end{aligned}$$

이다. $\square$

*13*번 풀이. $\nabla\cdot\mathbf{F}=6$이고, 발산정리를 사용하면

$$\iint_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS=\iiint_D\nabla\cdot\mathbf{F}dV=6\iiint_D dV$$

이다. 영역 D는 $x^2+y^2\le 2x$이고 $x^2+y^2\le z\le 2x$인 영역이므로, 원기둥 좌표를 이용하면

$$\begin{aligned}6\iiint_D dV&=6\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_{r^2}^{2r\cos\theta}rdzdrd\theta\\ &=6\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\left(2r^2\cos\theta-r^3\right)drd\theta\\ &=6\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4}{3}\cos^4\theta d\theta=8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2d\theta\\ &=8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta\right)d\theta=3\pi\end{aligned}$$

이다. $\square$

*14*번 풀이. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\ge 0$이므로 유향곡면 S의 경계를 위에서 볼 때, 반시계 방향으로 매개화하면,

$$C(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 5-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi$$

이다. 스토크스 정리를 사용하면,

$$\begin{aligned}\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS&=\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\\ &=\int_0^{2\pi}\left(5\cos t-\cos^2 t,\ -\cos t\sin t,\ 3\sin t\right)\cdot(-\sin t,\cos t,\sin t)\ dt\\ &=\int_0^{2\pi}\left(-5\cos t\sin t+3\sin^2 t\right)\ dt=3\pi\end{aligned}$$

이다. $\square$