

일반수학1(MTH1901) 중간시험

2025년 4월 21일 (월) 18:00 – 19:40

반드시 다음의 주의 사항을 읽고 난 후 문제를 푸시오.

– 부정행위는 절대 금함.

– 이름과 학번은 답안지의 1면과 3면에 볼펜으로 기입할 것.

– 50분이 지나기 전에는 퇴실하지 말 것.

– 계산기 및 기타 연습장은 사용하지 말 것.

★ 단답형 1번 - 8번 (문제당 5점, 옳은 답이 아닐 경우 0점, 부분점수 없음)

1. 다음의 함수 f 가 모든 실수에서 연속이 되도록 상수 a 의 값을 구하시오.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \sin(ax)}{x^7 + x^5 + 3x}, & x \neq 0 \\ \sqrt{5}, & x = 0 \end{cases}$$

2. 함수 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x+1}}$ 의 $x=0$ 근방에서 일차 근사식을 이용하여

$$\sqrt{\frac{1.01}{1.02}}$$

의 근삿값을 구하시오. (단, 소수로 표현하시오.)

3. 다음의 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2x)^{1/x}$$

4. $f(x) = x^7 + x^5 + x + 5$ 일 때, $(f^{-1})'(2)$ 의 값을 구하시오.

5. 다음 함수에 대하여 $x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

6. 다음의 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x^2)}{e^{2x} - 2 \sin x - \cos x}$$

7. 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_1^5 x\sqrt{x-1} \, dx$$

8. xy 평면에서 곡선 $y = x \ln x$ ($1 \leq x \leq e$), x -축, 직선 $x=e$ 로 둘러싸인 영역을 x -축을 중심으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 구하시오.

★ 서술형 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점, 풀이 과정 부분점수 있음)

9. $\cosh A = \frac{5}{3}$ 를 만족하는 음수 A 에 대하여 다음의 값을 각각 구하시오.

$$(a) \frac{\sinh A}{\cosh A} \quad (b) \cos\left(\arcsin\left(\frac{\sinh A}{\cosh A}\right)\right)$$

10. 점 (x, y) 가 매개변수 $t \in [0, 2\pi]$ 의 방정식으로 다음과 같이 서술되었다.

$$x = \cos(2t) + \cos t, \quad y = \sin(2t) + \sin t$$

이 때, 점 $(-1, -1)$ 에서 함수 $y = f(x)$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하시오.

11. 함수 f 와 g 가

$$f(x) = \int_0^{g(x)} \cosh(2t^2) \, dt, \quad g(x) = \int_0^{\cos x} \sqrt{4+5t^4} \, dt$$

로 정의될 때,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{xf(x)}{x - \pi/2}$$

의 값을 구하시오.

12. 다음 특이적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 3} dx$$

13. 다음 급수의 수렴, 발산 여부를 각각 판정하시오.

$$(a) \sum_{n=1}^\infty \frac{(\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+1})(n^2+3)}{\sqrt{n^6+1}} \quad (b) \sum_{n=1}^\infty \frac{(2n)^n (n!)}{(2n)!}$$

14. 다음 급수의 수렴, 발산 여부를 각각 판정하시오.

$$(a) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} \sin(5n)}{5^n} \quad (b) \sum_{n=1}^\infty \left[\ln\left(\sqrt{e} + \frac{1}{n}\right) \right]^{n+2}$$

1번 정답.	$-2 + 3\sqrt{5}$	□
2번 정답.	0.995	□
3번 정답.	e^3	□
4번 정답.	$\frac{1}{13}$	□
5번 정답.	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	□
6번 정답.	$\frac{2}{5}$	□
7번 정답.	$\frac{272}{15}$	□
8번 정답.	$\frac{\pi}{27}(5e^3 - 2)$	□

9번 풀이. (a) $\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$ 이므로, $\sinh^2 A = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ 이다.
 A 는 음수이므로 $\sinh A < 0$ 이다.
따라서 $\sinh A = -\frac{4}{3}$ 이고, $\frac{\sinh A}{\cosh A} = -\frac{4}{5}$ 이다.

(b) $\theta = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)$ 라고 하면, $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ 이고 $\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$ 이다.
 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 이므로 $\cos \theta \geq 0$ 이다.
따라서, $\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sinh A}{\cosh A}\right)\right) = \frac{3}{5}$ 이다. □

10번 풀이. 점 $(-1, -1)$ 에 대응되는 t 는 $x = 2\cos^2 t + \cos t - 1 = -1$ 에서
 $\cos t = 0$ 또는 $\cos t = -\frac{1}{2}$ 이므로 $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ 이다.
 $y = 2\cos t \sin t + \sin t = -1$ 도 만족해야 하므로 $t = \frac{3\pi}{2}$ 이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2\cos(2t) + \cos t}{-2\sin(2t) - \sin t}$$

이고, $t = \frac{3\pi}{2}$ 에서 미분계수는 -2 이므로 접선의 방정식은

$$y = -2x - 3$$

이다. □

11번 풀이. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ 이므로 $g(\pi/2) = 0$ 이고, $f(\pi/2) = 0$ 이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{xf(x)}{x - \pi/2} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x[f(x) - f(\pi/2)]}{x - \pi/2} = \frac{\pi}{2} f' \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

이다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\cosh(2g(x)^2)] g'(x) \\ &= \cosh(2g(x)^2) \sqrt{4 + 5\cos^4 x} (-\sin x) \end{aligned}$$

$$f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cosh(2g(\pi/2)^2) \sqrt{4 + 5\cos^4(\pi/2)} (-\sin(\pi/2)) = -2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{xf(x)}{x - \pi/2} = -\pi$$

이다. □

12번 풀이. $u = \frac{1}{\sqrt{3}}e^x$ 로 치환하면, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x} + 3} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(u) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

따라서, 특이적분 값은

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 3} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{e^x}{e^{2x} + 3} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{e^M}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

이다. □

13번 풀이. (a) $a_n = \frac{(\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+1})(n^2+3)}{\sqrt{n^6+1}}$, $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ 라고 하면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n^2+3)n^{3/2}}{\sqrt{n^6+1}(\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+1})} = \sqrt{2}$$

이다. $\sum b_n$ 이 수렴하므로 극한비교판정법에 의해 $\sum a_n$ 은 수렴한다.

(b) $a_n = \frac{(2n)^n (n!)}{(2n)!}$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}(n+1)(n!)}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \right] \left[\frac{(2n)!}{2^n n^n (n!)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1 \end{aligned}$$

이므로, 비율판정법에 의해 $\sum a_n$ 은 발산한다. □

14번 풀이. (a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1} \sin(5n)}{5^n}$ 라고 하면, 모든 n 에 대하여

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{1}{5^n}$$

이고, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{5^n}$ 은 수렴하므로, 비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ 은 수렴한다. 따라서,
 $\sum a_n$ 은 절대수렴하므로 $\sum a_n$ 은 수렴한다.

(b) $a_n = \left[\ln \left(\sqrt{e} + \frac{1}{n} \right) \right]^{n+2}$ 라고 하면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\sqrt{e} + \frac{1}{n} \right) \right]^{1+2/n} = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} < 1$$

이므로, 근판정법에 의해 $\sum a_n$ 은 수렴한다. □