일반수학2(MTH1902) 기말시험

2025년 12월 15일 (월) 18:00 – 19:40

반드시 다음의 주의 사항을 읽고 난 후 문제를 푸시오.

– 부정행위는 절대 금함.	**– 50분이 지나기 전에는 퇴실하지 말 것.**
– 이름과 학번은 답안지의 1면과 3면에 볼펜으로 기입할 것.	**– 계산기 및 기타 연습장은 사용하지 말 것.**

★ **단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점, 옳은 답이 아닐 경우 0점, 부분점수 없음)

1. 좌표공간의 영역 D가

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ \ 0 \le z \le 4\}$$

일 때, 삼중적분 $\iiint_D (x^2 + y^2)\, dV$의 값을 구하시오.

2. 다음 매개변수 곡면 위의 점 $P(5, 4, 2)$에서 접평면의 방정식을 구하시오. (단, $ax + by + cz = d$의 형태로 답안을 표현하시오.)

$$X(u, v) = (u^2 + v^2,\ 2uv,\ u^2 v)$$

3. 좌표공간의 곡면 S는 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 중에서 $0 \le z \le 1$인 영역이다. 다음 면적분의 값을 구하시오.

$$\iint_S x^2\, dS$$

4. 다음 주어진 벡터장 $\mathbf{F}$에 대하여, $\mathbf{F}$의 회전(**curl**)을 구하시오.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz - y,\ xz + x,\ z^2 - 2)$$

5. 좌표공간의 곡선 C가 $C(t) = (t^2,\ t + t\sin(t),\ \cos^3(t))\ \ (0 \le t \le \pi)$로 매개화 되어있을 때, 다음 선적분의 값을 구하시오.

$$\int_C (ye^{xy})\, dx + (xe^{xy} + z\cos(yz))\, dy + (y\cos(yz))\, dz$$

6. 좌표공간의 곡면 S는 포물면 $z = x^2 + y^2$ 중에서 두 평면 $z = 1$과 $z = 4$ 사이에 놓인 부분이다. 벡터장 $F(x, y, z) = (1, yz, 2x)$에 대해, 면적분 $\iint_S F \cdot \mathbf{n} dS$의 값을 구하시오. 단, S의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \le 0$이 되도록 주어졌다.

7. 좌표평면에서 중심이 $(0, 0)$이고 반지름이 3인 원을 시계 반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 다음 선적분의 값을 구하여라.

$$\int_C (y^3 + \sin x)dx + (e^y - x^3 + 1)\, dy$$

8. 좌표공간의 3차원 유계영역 D와 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y + z,\ e^{xyz} + y,\ y + \sin(z))$$

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (x,\ 2x + 3y + 4z,\ 5z)$$

에 대하여, D의 경계 ∂D 위에서

$$\iint_{\partial D} (\nabla \times \mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 360$$

을 만족한다고 한다. (단, $\mathbf{n}$은 ∂D의 외향 단위법선벡터장이다.) 이때, D의 부피를 구하여라.

★ **서술형** 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점, 풀이 과정 부분점수 있음)

9. xy평면에서 세 직선 $x = 0$, $y = 0$, $y = -x + 1$로 둘러싸인 유계영역을 R이라고 할 때, R에서 정의된 함수 $f(x, y) = 1 + x + x^2$의 그래프 아래에 있고 xy평면 위에 있는 삼차원영역의 부피를 구하시오.

10. xy 평면에서 영역 D가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 - y^2 \le 9 \text{ and } 0 \le 2y \le x\}$$

이때, **이중적분의 변수변환 공식**을 사용하여 $\iint_D \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) dxdy$의 값을 구하여라.

11. 타원 기둥면 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 평면 $x + y + z = 1$이 교차하는 곡선을 C라고 하자. (곡선 C의 향은 xy평면으로 정사영한 것의 향이 시계 반대 방향이 되도록 정한다.) 이때, 다음 선적분의 값을 구하여라.

$$\int_C -ydx + xdy + xdz$$

12. 좌표공간에서 D는 다음과 같이 정의된다.

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$$

벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^3 + 2x,\ \ -y^2 z + y,\ \ yz^2 - zy^3 + z^2)$에 대하여, D의 경계 ∂D를 통한 벡터장 $\mathbf{F}$의 유량 $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$의 값을 구하시오. (단, $\mathbf{n}$은 ∂D의 외향 단위법선벡터장이다.)

13. 유향곡면 S는 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$에서 $z \ge 0$인 부분이며, S의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \ge 0$으로 주어졌다. 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 - y,\ \ x\cos z,\ \ e^{xy} + z^2)$$

에 대하여, $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$를 구하시오.

14. 양의 실수 ρ (단, $\rho > 1$)에 대하여, 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ 중에서 $x^2 + y^2 + (z - \rho)^2 \le 1$을 만족하는 부분을 S라고 하자. ρ의 값에 상관없이, S의 넓이는 언제나 π가 됨을 보여라. (참고: 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CA}\cos(\angle C)$가 성립함(코사인 법칙)을 이용하여도 된다.)

*1*번 정답. 30π □

*2*번 정답. $2x-7y+6z=-6$ (계수가 달라도 같은 평면이면 정답) □

*3*번 정답. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$ □

*4*번 정답. $(-x, y, 2)$ □

*5*번 정답. $e^{\pi^3}-1$ □

*6*번 정답. 21π □

*7*번 정답. $-\dfrac{243}{2}\pi$ □

*8*번 정답. 40 □

*9*번 풀이. 적분 영역은 $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1+x+x^2$ 으로 나타낼 수 있다. 따라서 주어진 영역의 부피는

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1+x+x^2} 1\ dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1+x+x^2)\ dydx$$
$$= \int_0^1 \left[(1+x+x^2)y\right]_{y=0}^{y=1-x}\ dx = \int_0^1 (1-x^3)\ dx = \left[x - \frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4}$$

이다. □

*10*번 풀이. $x^2-y^2=u,\ \frac{y}{x}=v$ 로 치환하면, 영역 D 는 $1 \le u \le 9, 0 \le v \le \frac{1}{2}$ 로 정의되고, Jacobian 행렬의 행렬식을 구하면

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{pmatrix} = 2-2\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = 2-2v^2$$

이므로, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2-2v^2}$ 이다. $0 \le v \le \frac{1}{2}$ 이므로, 이 값은 항상 양이다. 따라서

$$\iint_D \left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_1^9 \left(1-v^2\right) \frac{1}{2-2v^2} dudv$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_1^9 \frac{1}{2} dudv = 2$$

이다. □

*11*번 풀이 (*1*). 곡선을 $C(t) = (2\cos t,\ \sin t,\ 1-2\cos t - \sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 로 매개화 할 수 있다. 따라서

$$\int_C -ydx + xdy + xdz$$
$$= \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-2\sin t) + (2\cos t)(\cos t) + 2\cos t(2\sin t - \cos t))\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos t \sin t - 2\cos^2 t\right) dt = 4\pi - 0 - 2\pi = 2\pi$$

이다. □

*11*번 풀이 (*2*). 평면 $x+y+z=1$ 안에서 폐곡선 C 내부에 있는 영역을 S 라 하면, S 는 다음과 같이 매개화 할 수 있다.

$$S(x,y) = (x,\ y,\ 1-x-y) \quad \left(\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1\right)$$

한편 스토크스 정리에 의해 $\int_C \mathbf{F}\cdot ds = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, dS$ 이고, C 의 방향을 고려할 때, $\mathbf{n}$ 은 평면을 위로 뚫고 올라가는 방향이다. $\nabla \times \mathbf{F} = (0,-1,2)$ 이고 $S_x \times S_y = (1,1,1)$ 이므로,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1} (0,-1,2)\cdot(1,1,1)\, dxdy = \iint_{\frac{x^2}{4}+y^2\le 1} 1\, dxdy$$

가 되고, 이 값은 타원 영역 $\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1$ 의 넓이와 같다. 따라서 답은 2π 이다. □

*12*번 풀이. 발산정리에 의해 $\iint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F} dV$ 이다.

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = (y^3+2) + (-2yz+1) + (2yz - y^3 + 2z) = 3 + 2z$$

이므로,

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F} dV = \iiint_D (3+2z) dV = 3\mathrm{vol}(D) + 2\iiint_D z dV$$

이다. 대칭성에 의해 $\iiint_D z dV = 0$ 이고, $\mathrm{vol}(D) = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3$ 이므로, 답은 32π 이다. □

*13*번 풀이. 스토크스정리에 의해, $\partial S = C$ 라 하면, C 의 방향은 반시계이고 $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\, dS = \int_C \mathbf{F}\cdot ds$ 이다. 한편 C 는 xy 평면위에 있고, 다음과 같이 매개화 할 수 있다.

$$C(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)\ \ (0 \le t \le 2\pi)$$

따라서 곡선 C 위에서 $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, z = 0$ 이므로 $dx = -2\sin t dt,\ dy = 2\cos t dt, dz = 0$ 이고,

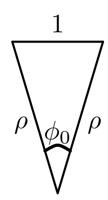
$$\int_C F\cdot ds = \int_0^{2\pi} (z-y)dx + (x\cos z)dy + (e^{yz}+z^2)dz$$
$$= 4\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t + 0\right) dt = 8\pi$$

이다. □

*14*번 풀이. 곡면을

$$X(\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)$$

로 매개화 할 수 있고, θ 의 범위는 $0 \le \theta \le 2\pi$ 이고, ϕ 의 범위는 다음 그림을 만족하는 ϕ_0 에 대해 $0 \le \phi \le \phi_0$ 이다.



따라서 코사인법칙에 의해 $\cos\phi_0 = 1 - \dfrac{1}{2\rho^2}$ 이다. 그러므로,

$$\iint_S 1 dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\phi_0} \rho^2 \sin\phi\, d\phi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[-\rho^2\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\phi_0} d\theta = 2\pi\left(-\rho^2(\cos\phi_0 - \cos 0)\right)$$
$$= 2\pi\left(-\rho^2\left(1 - \frac{1}{2\rho^2} - 1\right)\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$$

가 된다. □