**1** 직사각형 영역 $R = [a, b] \times [c, d]$에서 적분가능한 함수 $f, g$ 에 대해

$$\iint_R (2f + 3g)(x, y)dxdy = 5, \qquad \iint_R (3f + 2g)(x, y)dxdy = 10$$

일 때, $\iint_R f(x, y)dxdy$ 와 $\iint_R g(x, y)dxdy$ 의 값을 각각 구하시오.

**2** $R_1 = [0, 2] \times [0, 1]$이고 $R_2 = [1, 2] \times [1, 2]$일 때, 함수 $f : R_1 \cup R_2 \to \mathbb{R}$ 가

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{if } (x, y) \in R_1, \\ -3 & \text{if } (x, y) \in R_2 \end{cases}$$

로 정의되었다. $\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y)dxdy$ 의 값을 구하고, 이유를 설명하시오.

**3** 다음 부등식을 증명하시오.

(a) $0 \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\sin x}{1 + x + y}\, dxdy \leq 1$

(b) $-1 \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\cos(xy + 1)}{1 + x^3}\, dxdy \leq 1$

**1** 주어진 영역 $D$에서 다음 이중적분의 값을 푸비니정리를 이용하여 구하시오.

(a) $\iint_D xe^y dxdy, \quad D = [0,2] \times [-\ln 2, \ln 2]$

(b) $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x+y}}, \quad D = [0,1] \times [0,1]$

(c) $\iint_D 3\sqrt{x+y}\, dxdy$, $D$는 $x$축과 두 직선 $y = x$, $x = 1$로 둘러싸인 유계 영역

(d) $\iint_D xy\, dxdy$, $D$는 점 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$을 세 꼭짓점으로 가지는 삼각형 영역

(e) $\iint_D x\, dxdy$, $D$는 직선 $y = x+1$과 포물선 $y = x^2 - 1$로 둘러싸인 유계 영역

(f) $\iint_D y^2 dxdy$, $D$는 두 포물선 $y^2 = x+1$, $y^2 = 1-x$으로 둘러싸인 유계 영역

(g) $\iint_D y\, dxdy$, $D$는 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$과 두 직선 $y = 0$, $y = 1$로 둘러싸인 유계 영역

**2** 이중적분을 반복적분 형태로 나타낼 때, 적분 순서에 따라 이중적분의 값이 쉽게 계산되기도 하고 그렇지 않기도 한다. 적분 순서에 유의하여 다음 이중적분의 값을 계산하시오.

(a) $\iint_D \frac{e^x - 1}{x}\, dxdy$, $D$는 세 직선 $y = 0$, $y = x$, $x = 1$로 둘러싸인 유계 영역

(b) $\iint_D \frac{2y}{1+x}\, dxdy$, $D$는 세 직선 $x = 0$, $y = x$, $y = 1$로 둘러싸인 유계 영역

(c) $\iint_D \sin(x^2) dxdy$, $D$는 $x$축과 두 직선 $x = \sqrt{\pi}$, $y = x$로 둘러싸인 유계 영역

(d) $\iint_D e^{-y^3} dxdy$, $D$는 $y$축과 직선 $y = 1$, 곡선 $y = \sqrt{x}$로 둘러싸인 유계 영역

**3** 적분 순서를 바꾸어 다음 반복적분의 값을 계산하시오.

(a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dxdy$

(b) $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\, dydx$

**1** 다음 반복적분의 값을 구하시오. (변수변환 공식을 사용하지 마십시오.)

(a) $\int_0^1 \int_0^y \int_0^z (z+xy)dxdzdy$

(b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x+y} dzdydx$

(c) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$ (힌트: 구의 부피)

**2** 푸비니 정리를 이용하여 다음 삼중적분의 값을 구하시오.

(a) $\iiint_D xy\,dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x-1 \le z \le 2-y\}$

(b) $\iiint_D 2z\,dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 2\}$

(c) $\iiint_D 2y\,dxdydz$, $D$는 다섯 개의 평면 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=0$, $z=1$로 둘러싸인 유계 영역

(d) $\iiint_D x\,dxdydz$, $D$는 네 개의 평면 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+y+z=2$로 둘러싸인 유계 영역

(e) $\iiint_D 2x\,dxdydz$, $D$는 포물기둥면 $y=x^2$과 세 평면 $y=x$, $z=0$, $z=x+y$로 둘러싸인 유계 영역

(f) $\iiint_D z^6\,dxdydz$, $D$는 포물면 $z=x^2+y^2$과 평면 $z=2$로 둘러싸인 유계 영역
(힌트: 예제 13.3.2 직전의 공식과 원판의 넓이)

(g) $\iiint_D z\,dxdydz$, $D$는 구 $x^2+y^2+z^2 \le 4$의 부분집합으로 두 평면 $z=0$과 $z=\sqrt{3}$ 사이에 놓인 부분 (힌트: 예제 13.3.2 직전의 공식과 원판의 넓이)

(h) $\iiint_D 2z\,dxdydz$, $D$는 구 $x^2+y^2+z^2 \le 1$의 부분집합으로, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$을 모두 만족하는 유계 영역. (필요하면 $x = \sin\theta$ $(0 \le \theta \le \pi/2)$로 치환)

**1** (a) $\phi, \psi$ 가 유계 닫힌구간 $[c, d]$에서 연속이고 $\phi \le \psi$ 일 때 영역

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \phi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

의 넓이를 $\phi$와 $\psi$의 정적분으로 나타내시오.

(b) 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 중에서 오른쪽 반평면 $x > 0$에 제한된 곡선과 포물선 $x = 5 - y^2$으로 둘러싸인 유계 영역의 넓이를 구하시오. 필요하면 대칭성과 다음 힌트를 이용하시오.
(힌트: $a$가 양의 상수이면 $\dfrac{d}{dt}\Big(t\sqrt{t^2+a} + a\ln\big(t + \sqrt{t^2+a}\big)\Big) = 2\sqrt{t^2+a}$ )

**2** $\mathbb{R}^3$의 영역 $D$가 다음과 같이 주어졌을 때, $D$의 부피를 삼중적분을 이용하여 구하시오.

(a) $D$는 기둥면 $|x| + |y| \le 1$과 $xy$ 평면, 포물면 $z = x^2 + y^2 + 1$로 둘러싸인 유계 영역
(필요하면 대칭성 이용)

(b) $D$는 세 평면 $y = x, y = -x, x = 1$로 둘러싸인 삼각기둥 중에서 평면 $z = 0$와 쌍곡포물면 $z = x^2 - y^2$ 사이에 있는 유계 영역

(c) $D$는 두 포물기둥면 $y = x^2$, $y = 2 - x^2$과 두 평면 $x + y + z = 0$, $z = 3$으로 둘러싸인 유계 영역

(d) $D$는 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$과 두 평면 $z = x + 3$, $z = y$로 둘러싸인 유계 영역
(힌트: 선형성과 원의 넓이)

(e) $D$는 포물기둥면 $y^2 = x$, 세 평면 $y = x - 2$, $z = 0$, $z = 2x$로 둘러싸인 유계 영역

(f) $D$는 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$과 평면 $z = 0$, 포물면 $z = x^2 + 1$로 둘러싸인 유계 영역
(필요하면 $x = \sin\theta$로 치환하고 배각의 공식 이용)

**1** 이변수 벡터함수 $\Phi : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}^2$가 다음과 같이 주어졌을 때, 아래 물음에 답하시오.

$$\Phi(u,v) = (2u - v,\, u - 2v)$$

(a) $(x,y) = \Phi(u,v)$라 두었을 때, 야코비 행렬식 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$의 값을 구하시오.

(b) $\displaystyle\iint_{\Phi([0,1]\times[0,2])} y\,dxdy$ 를 $u, v$의 이중적분으로 나타내고, 이 값을 구하시오.

**2** 변수변환 공식을 이용하여 다음 이중적분의 값을 구하시오. $D$는 $xy$ 평면의 부분집합이다.

(a) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2 e^{x+y}\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x+y \le 1,\ \ -1 \le x-y \le 1\}$

(b) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le 2x+y \le 2,\ \ -1 \le x-y \le 2\}$

(c) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,$ $D$는 네 직선 $y=0$, $y=1$, $y=x$, $y=x-1$로 둘러싸인 유계 영역
(힌트: $D$를 연립부등식으로 나타내시오.)

(d) $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy,$ $D$는 네 점 $(0,0)$, $(2,-1)$, $(3,2)$, $(1,3)$을 꼭짓점으로 가지는 사각형 영역

(e) $\displaystyle\iint_{\Phi([1,2]\times[0,1])} y\,dxdy, \quad \Phi(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$

**3** $D \subset \mathbb{R}^3$가 여섯 개의 평면 $z=0$, $z=1$, $x+y-z=0$, $x+y-z=1$, $x-y-z=0$, $x-y-z=-1$로 둘러싸인 평행육면체일 때, 삼중적분 $\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz$의 값을 구하시오.

**4** (평행이동) 상수 $a, b \in \mathbb{R}$에 대해 사상 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$가 $\Phi(x,y) = (x+a, y+b)$로 주어졌다. $D$가 $\mathbb{R}^2$의 기본 영역이고 실함수 $f$가 $D$에서 연속일 때 다음 등식을 증명하시오.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\Phi(D)} f(u-a, v-b)dudv$$

(이 등식에 따르면 $D$의 넓이는 평행이동에 대해 불변이다.)

삼중적분에서 이와 비슷한 결과가 성립하는가? 서술하고 증명하시오.

**5** (평면의 회전변환) 평면에서 원점을 중심으로 각 $\theta$만큼 회전이동하는 변환을 $\Phi$라 하자. 즉,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이다. $D$가 $\mathbb{R}^2$의 기본 영역이고 실함수 $f$가 $D$에서 연속이라 하자.

(a) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\Phi(D)} f(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)dudv$ 임을 증명하시오.
(이 등식에 따르면 $D$의 넓이는 회전변환에 대해 불변이다.)

(b) (a)를 이용하여 $\displaystyle\iint_{|x|+|y-1|\le 1} y\,dxdy$ 의 값을 구하시오. (힌트: $\pm\pi/4$ 회전)

**6** (대칭성) 집합 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$에 포함되는 기본 영역 $D_1$에 대해

$$D_2 = \{(-x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in D_1\}, \quad D = D_1 \cup D_2$$

라 하자($D_2$는 $D_1$을 $y$축에 대해 대칭시켜 얻은 집합). $D$에서 정의된 실함수 $f, g$가

$$\text{모든 } (x,y) \in D \text{ 에 대해 } \ f(-x,y) = f(x,y) \text{ 이고 } \ g(-x,y) = -g(x,y)$$

를 만족할 때, 이중적분의 가법성과 변수변환 공식을 이용하여 다음을 증명하시오.

(a) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$

(b) $\displaystyle\iint_D g(x,y)dxdy = 0$

**7** 이중적분의 값을 구할 때 대칭성을 이용하면 때로는 계산이 간단해진다. 6번 문제의 결과를 이용하여 다음 이중적분의 값을 계산하고, 이유를 설명하시오.

(a) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy, \quad D$는 단위원판 $x^2 + y^2 \leq 1$

(b) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - |x|\}$

**8** (대칭성) 집합 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$에 포함되는 기본 영역 $D_1$에 대해

$$D_2 = \{(x,y,-z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \in D_1\}, \quad D = D_1 \cup D_2$$

라 하자($D_2$는 $D_1$을 $xy$ 평면에 대해 대칭시켜 얻은 집합). $D$에서 정의된 실함수 $f, g$가

$$\text{모든 } (x,y,z) \in D \text{ 에 대해 } \ f(x,y,-z) = f(x,y,z) \text{ 이고 } \ g(x,y,-z) = -g(x,y,z)$$

를 만족할 때, 삼중적분의 가법성과 변수변환 공식을 이용하여 다음을 증명하시오.

(a) $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = 2\iint_{D_1} f(x,y,z)dxdydz$

(b) $\displaystyle\iiint_D g(x,y,z)dxdydz = 0$

($xz$ 평면 또는 $yz$ 평면에 대해 대칭인 영역에 대해서도 위와 비슷한 결과가 성립한다.)

**9** 삼중적분 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} z\,dxdydz$ 의 값을 구하고, 이유를 설명하시오.

**1** 다음 삼중적분의 값을 아래에 요구된 두 가지 방법으로 각각 구하시오.

$$\iiint_D z\,dxdydz, \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

(a) 푸비니 정리와 극좌표 치환 이용 (원기둥좌표 치환을 이용하는 셈)

(b) 구면좌표 치환 이용

**2** 극좌표 치환을 이용하여 다음 이중적분의 값을 구하시오.

(a) $\iint_D x\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0\}.$

(b) $\iint_D y\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ y \ge |x|\}.$

(c) $\iint_D y\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0,\ y \ge \sqrt{3}x\}.$

**3** $xy$ 평면의 영역 $D$가 극좌표 방정식 $r = 1+\cos\theta$로 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역일 때, 극좌표 치환을 이용하여 $D$의 넓이를 구하시오. (힌트: $0 \le r \le 1+\cos\theta$)

**4** 다음 이중적분의 값을 아래에 제시된 두 가지 방법으로 각각 구하시오.

$$\iint_D x\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \le 1\}.$$

(a) $(u,v) = (x-1,y)$인 치환과 극좌표 치환을 (차례로) 이용

(b) $D$를 극좌표 연립부등식 $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$, $0 \le r \le f(\theta)$로 직접 표현

**5** $xy$ 평면에서 $x$축과 곡선 $y = -x^2+2x+3$으로 둘러싸인 유계 영역을 $y$축 둘레로 $2\pi$만큼 회전하여 얻은 입체의 부피를 구하시오.

**6** 구면좌표 치환을 이용하여 다음 삼중적분의 값을 구하시오.

(a) $\iiint_D x^2 dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$

(b) $\iiint_D z\,dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ y \ge 0\}$

(c) $\iiint_D z\,dxdydz, \quad D$는 위쪽 반구면 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2 \le 1)$과 원뿔면 $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$으로 둘러싸인 유계 영역

(d) $\iiint_D dxdydz, \quad D$는 연립부등식 $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$과 $x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$을 만족하는 유계 영역

**7** 적당한 변수변환 공식을 이용하여 다음 삼중적분의 값을 구하시오. 필요하면 푸비니 정리와 대칭성을 추가로 이용하시오.

(a) $\iiint_D dxdydz$, $D$는 두 포물면 $z = 2x^2 + y^2$과 $z = 3 - x^2 - 2y^2$으로 둘러싸인 유계 영역

(b) $\iiint_D z\, dxdydz$, $D$는 구 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1$ (필요하면 $w = z - 1$ 치환)

(c) $\iiint_D dxdydz$, $D$는 타원기둥면 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 두 평면 $z = 2 - y$, $z = 0$으로 둘러싸인 유계 영역

(힌트: 필요하면 먼저 $x = au$, $y = bv$로 치환하고 변수변환 공식(13.5절) 이용)

(d) $\iiint_D dxdydz$, $D$는 타원포물면 $z = 2x^2 + 2y^2$과 쌍곡포물면 $z = x^2 - y^2 + 2$ 사이에 있는 유계 영역

(e) $\iiint_D z^2 dxdydz$, $D$는 타원체 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 \le 1$

(힌트: $x = au$, $y = bv$, $z = cw$로 치환)