

1 다음 이변수 벡터함수 X 가 정칙곡면을 나타내는지 아닌지 답하고 설명하시오.

(a) $X(u, v) = (u + v, u - v, uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$

(b) $X(u, v) = (u^2 \cos v, u^2 \sin v, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$

2 다음에 주어진 곡면을 매개변수곡면으로 나타내시오.

(a) 평면 $x + y + z = 1$

(b) 포물면 $z = x^2 + y^2$

(c) 원기둥면 $x^2 + y^2 = 2x$

(d) 타원체면 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

(e) 현수선(catenary) $C(t) = (t, \cosh t)$ 를 x 축 둘레로 2π 회전하여 얻은 곡면(catenoid)

(f) xz 평면의 원 $(x - 3)^2 + z^2 = 1$ 을 z 축 둘레로 2π 회전하여 얻은 곡면
(필요하면 주어진 원을 매개화)

3 다음 매개변수곡면의 점 \mathbf{p} 에서 접평면의 방정식을 구하시오. (등위면을 이용하지 마시오.)

(a) $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad \mathbf{p} = (1, 1, 0)$

(b) $X(u, v) = (u^2 - v^2, u - v, 2u + v^2), \quad \mathbf{p} = (1, 1, 2)$

(c) $X(u, \theta) = (u \cos \theta, u \sin \theta, \theta), \quad \mathbf{p} = \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$

(d) $X(u, \theta) = (\cosh u \cos \theta, \cosh u \sin \theta, \sinh u), \quad \mathbf{p} = (1, 1, 1)$

4 다음 물음에 답하시오.

(a) 점 $(1, 0, 0)$ 을 지나고 $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ 방향으로 평행한 직선을 매개화하시오.

(b) (a)에서 얻은 매개변수곡선을 $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 로 나타내었을 때, 점 $C(t)$ 를 z 축 둘레로 각 θ 만큼 회전하여 얻은 점 $X(t, \theta)$ 의 식을 구하시오.

(c) $X(t, \theta)$ 의 첫 번째, 두 번째, 세 번째 성분을 각각 x, y, z 라 할 때, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 임을 보이시오.

5 (Möbius 띠, 15.4절 관련) 다음 매개변수곡면을 생각하자.

$$X(t, \theta) = \left(\left(1 - t \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta, \left(1 - t \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (|t| \leq 1/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(a) $0 < \theta < 2\pi$ 일 때 $(X_t \times X_\theta)(0, \theta)$ 를 구하시오. 그리고 법선벡터 함수 $(X_t \times X_\theta)(0, \theta)$ 가 $\theta \in (0, 2\pi)$ 에 대해 연속임을 설명하시오.

(b) 우극한 $\lim_{\theta \downarrow 0} (X_t \times X_\theta)(0, \theta)$ 와 좌극한 $\lim_{\theta \uparrow 2\pi} (X_t \times X_\theta)(0, \theta)$ 를 각각 구하시오.

1 다음 매개변수 곡면의 넓이를 구하시오.

(필요하면 항등식 $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ 를 이용하시오.)

(a) $X(u, v) = (u + v, u - v, uv), \quad u^2 + v^2 \leq 1$

(b) $X(u, v) = \left(u, \frac{u^2}{2} + uv, uv\right), \quad (u, v) \in [1, 2] \times [0, 1]$

(c) $X(\varphi, \theta) = ((2 + \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi$

2 실함수 f 가 구간 $[a, b]$ 에서 C^1 이고 $f > 0$ 이라 하자.

(a) 곡선 $y = f(x)$ 를 x 축 둘레로 2π 회전하여 얻은 곡면을 매개화하시오.

(b) (a)에서 얻은 곡면의 넓이가

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

임을 보이시오.

3 다음에 주어진 곡면을 매개화하고, 면적분을 이용하여 넓이를 구하시오.

(a) 포물면 $z = x^2 + y^2$ 중에서 $z \leq 1$ 을 만족하는 부분

(b) 원뿔면 $z = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}$ 중에서 $x^2 + y^2 \leq 1$ 을 만족하는 부분 ($\lambda \neq 0$ 는 상수)

(c) 평면 $x + 2y + 3z = 4$ 중에서 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq 1$ 을 만족하는 부분

(d) 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 중에서 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 을 만족하는 부분

(e) 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$ 중에서 $y^2 + z^2 \leq 1$ 을 만족하는 부분

(f) 위쪽 반구면 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 중에서 $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ 을 만족하는 부분

1 다음에 주어진 매개변수곡면 X 와 이 곡면에서 정의된 실함수 f 에 대해 $\iint_X f dS$ 의 값을 구하시오.

$$(a) X(u, v) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u^2 - v^2}{2}, v \right) \quad (0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1), \quad f(x, y, z) = \sqrt{1 + 2z^2}$$

$$(b) X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad (-1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi), \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(c) X(u, v) = (v + \cos u, \sin u, v), \quad (0 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq 3), \quad f(x, y, z) = y(x - z)$$

$$(d) X(u, v) = ((3 + \cos u) \cos v, (3 + \cos u) \sin v, \sin u) \quad (0 \leq u, v \leq 2\pi), \\ f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

2 다음에 주어진 곡면 S 와 이 곡면에서 정의된 실함수 f 에 대해 $\iint_S f dS$ 의 값을 구하시오. 필요하면 이중적분의 대칭성(13.5절 과제 참고)을 사용하시오.

$$(a) S \text{ 는 원뿔면 } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f(x, y, z) = x$$

$$(b) S \text{ 는 단위구면 } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

$$(c) S \text{ 는 쌍곡포물면 } z = x^2 - y^2 \text{ 중에서 } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 을 만족하는 부분,} \\ f(x, y, z) = z$$

$$(d) S \text{ 는 평면 } x + 2y + z = 4 \text{ 중에서 } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 을 만족하는 부분,} \\ f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$$

$$(e) S \text{ 는 타원체면 } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1, \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}$$

$$(f) S \text{ 는 일엽쌍곡면 } x^2 + y^2 - z^2 = 1 \text{ 중에서 } 0 \leq z \leq \sinh 1 \text{ 을 만족하는 부분,} \\ f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3 다음에 주어진 곡면 S 와 이 곡면에서 정의된 실함수 f 에 대해 S 에서 f 의 평균값을 구하시오.

$$(a) S = \partial D, \quad D \text{ 는 연립부등식 } z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ 을 만족하는 유계 영역,} \\ f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(b) S = \partial D, \quad D \text{ 는 원기둥면 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 과 두 평면 } z = -1, z = 2 \text{ 로 둘러싸인 유계 영역,} \\ f(x, y, z) = z$$