1 다음 벡터장 $\mathbf{F}$에 대해 발산 $\nabla \cdot \mathbf{F}$와 회전(curl) $\nabla \times \mathbf{F}$를 각각 구하시오.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz,\, xy,\, yz)$

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 + x,\, yz + z^2,\, x + xy)$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right), \quad (x,y) \neq (0,0)$

2 다음 벡터장이 비압축장이고 비회전장일 때 상수 a, b, c, d의 값을 각각 구하시오.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + 2y + az)\mathbf{e}_1 + (bx + cy - z)\mathbf{e}_2 + (2x + dy + z)\mathbf{e}_3 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

3 다음 실함수 f에 대해 $\nabla \cdot \nabla f$를 각각 구하시오.

(a) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (x,y) \neq (0,0)$

4 (a) xy 평면에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$가 그래디언트 벡터장이면 $(f_2)_x = (f_1)_y$ 임을 보이시오. 여기에서 f_1, f_2는 미분가능한 실함수이다.

(b) 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (x + y^2,\, x^2 + y)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$가 그래디언트 벡터장인지 판정하고 이유를 설명하시오.

5 다음 벡터장이 그래디언트 벡터장인지 판정하고 이유를 설명하시오.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y + \sin x)\mathbf{i} + (z + \cos y)\mathbf{j} + (x + e^z)\mathbf{k}$$

1 다음과 같이 주어진 벡터장 $\mathbf{F}$와 매개변수곡선 C에 대해 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$의 값을 구하시오.

(a) $\mathbf{F}(x,y)=(y,2x), \quad C(t)=(\cos t,\, \sin t) \quad (0\le t\le \pi)$

(b) $\mathbf{F}(x,y)=(x+2y)\,\mathbf{i}+(x-y)\,\mathbf{j}, \quad C(t)=(t,t^2) \quad (0\le t\le 1)$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z)=(4xy,\, 2yz,\, xz), \quad C(t)=(t,t^2,t^3) \quad (0\le t\le 1)$

(d) $\mathbf{F}(x,y,z)=y\,\mathbf{e}_1+z\,\mathbf{e}_2+x\,\mathbf{e}_3, \quad C(t)=(\sin t,\, \cos t,\, t) \quad (0\le t\le 2\pi)$

2 다음 선적분의 값을 구하시오. 아래에서 주어진 곡선 C의 궤적은 몇 개의 점을 제외하면 중복되지 않는다.

(a) $\int_C y^2dx+x^2dy, \quad C$는 원 $x^2+y^2=1$을 따라 $(0,-1)$부터 $(0,1)$까지 반시계 방향으로 진행하는 곡선

(b) $\int_C (x+z)dx+(x+y)dy+(y+z)dz, \quad C$는 포물면 $z=xy$와 평면 $y=-x$의 교선을 따라 점 $(0,0,0)$부터 $(1,-1,-1)$까지 진행하는 곡선

(c) $\int_C z\,dx+x\,dy+y\,dz, \quad C$는 포물면 $z=x^2+y^2$과 평면 $z=2x$의 교선이고, 그 방향은 C를 xy 평면에 정사영한 곡선이 양의 방향을 가지도록 주어졌다.

3 xy 평면의 영역 D가 다음과 같이 주어졌을 때, 각각의 선적분의 값을 구하시오.

(a) $\int_{\partial D} -y^3dx+x^3dy, \quad D$는 원판 $x^2+y^2\le 1$ 중에서 $x\le 0$을 만족하는 영역

(b) $\int_{\partial D} (x+y)dx+x\,dy, \quad D$는 세 점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$을 꼭짓점으로 가지는 삼각형 영역

(c) $\int_{\partial D} xy\,dx+x^2dy, \quad D=[0,1]\times[0,1]$

4 $\mathbb{R}^3$의 어떤 입자가 점 $(0,0,0)$에서 출발하여 점 $(0,0,1)$과 $(0,1,1)$을 차례로 거쳐 점 $(1,1,1)$까지 진행하며, 세 개의 선분을 따라 진행한다고 한다. 이 때 힘의 장 (force field)

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x-y)\mathbf{i}+(y-z)\mathbf{j}+(z-x)\mathbf{k}$$

가 이 입자에 한 일(work)을 구하시오.

1 (단답형) 다음과 같이 주어진 벡터장 $\mathbf{F}$의 포텐셜 함수를 구하시오.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = (y^2,\, 2xy), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz,\, xz,\, xy), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z,\, x-z,\, x-y), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

(e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (\cos y,\, -x\sin y + \sin z,\, y\cos z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

2 1번 문제의 결과를 이용하여 다음 선적분의 값을 구하시오.

(a) $\displaystyle\int_C y^2 dx + 2xy\, dy$, $\quad C$는 $(0,0)$에서 출발하여 $(1,0)$, $(1,1)$을 차례로 지나 $(2,1)$에 도착하는 조각적 선분

(b) $\displaystyle\int_C \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy, \quad C(t) = (2\cos t, \sin t) \quad \left(\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{6}\right)$

(c) $\displaystyle\int_C yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$, $\quad C$는 포물면 $z = x^2 + y^2$과 평면 $y = x$의 교선을 따라 점 $(-1,-1,2)$부터 $(2,2,8)$까지 진행하는 곡선

(d) $\displaystyle\int_C (y+z)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$, $\quad C = C_1 + C_2$이고, $C_1(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$이며 $C_2(t) = (t, t-1, 2\pi t)$ $(1 \le t \le 2)$.

3 다음에 주어진 벡터장이 정의역에서 보존장인지 판정하고, 그 이유를 설명하시오.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2, 2xy), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz,\, xy,\, yz), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

4 $\mathbb{R}$에서 미분가능한 일변수 실함수 f, g, h에 대해 다음 벡터장이 $\mathbb{R}^3$에서 보존장이다. f, g, h가 $f(0) = g(0) = h(0) = 0$을 만족할 때 $f(z)$, $g(x)$, $h(y)$의 식을 모두 구하시오.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy + f(z),\, -2yz + g(x),\, 2xz + h(y))$$

5 $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$에서 힘의 장(force field) $\mathbf{F}$가 다음과 같이 주어졌다.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

어떤 입자가 $C(t) = (3\sin t\cos t,\, 2\sin^2 t,\, \cos t)$ $(\pi/2 \le t \le \pi)$를 따라 점 $(0,2,0)$부터 점 $(0,0,-1)$까지 움직였을 때, 힘의 장 $\mathbf{F}$가 이 입자에 한 일(work)을 구하시오.

1 매개변수곡면 X와 벡터장 $\mathbf{F}$, 그리고 X의 연속 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 각각 다음과 같이 주어졌다. 면적분 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$의 값을 구하시오.

(a) $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \qquad (0 \le u \le 2\pi, \ 0 \le v \le 2)$,

$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z), \qquad \mathbf{n}(x, y, z) \cdot (x, y, 0) > 0.$

(b) $X(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, 4v), \quad (u, v) \in [1, 2] \times [1, 5]$,

$\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 1, -1), \qquad \mathbf{n}(X(u, v)) = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v)$

(c) $X(u, \theta) = (u \cos\theta, u \sin\theta, \theta), \quad (u, \theta) \in [-1, 1] \times [0, 4\pi]$,

$\mathbf{F}(x, y, z) = (-z, x, y), \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$

2 벡터장 $\mathbf{F}$와 곡면 S, 그리고 곡면 S의 연속 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 각각 다음과 같이 주어졌다. $\mathbf{n}$ 방향으로 S를 통한 $\mathbf{F}$의 유량(flux)을 구하시오. 필요하면 기울기 벡터가 등위면에 수직임을 이용하시오.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$,

S는 평면 $x + y + z = 1$ 중에서 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$로 둘러싸인 유계 곡면이며, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,

S는 포물면 $z = x^2 + y^2 - 1$ 중에서 xy 평면의 아래쪽에 있는 부분이며, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$,

S는 원뿔면 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 중에서 두 평면 $z = 1$과 $z = 2$ 사이에 놓인 부분이며, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$을 만족한다.

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$,

S는 원기둥면 $x^2 + y^2 = 4$ 중에서 두 평면 $z = 0$과 $z = 4 - x$ 사이에 놓인 부분이며, $\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}(x, y, z) \cdot (x, y, 0) > 0$을 만족한다.

3 $\mathbb{R}^3$에서 두 포물면 $z = x^2 + y^2$과 $z = 2 - x^2 - y^2$으로 둘러싸인 유계 영역을 D라 하자.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -y, z)$$

이고 ∂D의 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 D를 벗어나는 방향으로 주어졌을 때, <u>면적분의 정의</u>를 이용하여 $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$의 값을 구하시오. (주의: 발산정리를 사용하지 마십시오.)