1 그린 정리를 사용하여 다음 선적분의 값을 구하시오. 주어진 닫힌 곡선(폐곡선)은 양의 방향(반시계 방향)을 가진다.

(a) $\displaystyle\int_{x^2+y^2=4} -y^3dx + x^3dy$

(b) $\displaystyle\int_{\partial D} (x-y)dx + (x+y)dy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ \sqrt{x} \le y \le 1\}$

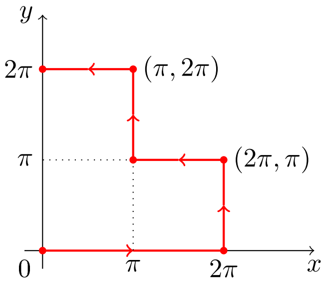
(c) $\displaystyle\int_{\partial D} \big(\sinh x - y^2\big)dx + 3x\,dy\,,$

D는 $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$를 꼭짓점으로 가지는 삼각형 영역

(d) $\displaystyle\oint_{\partial D} (x^2-y^2)dx + (x^2+y^2)dy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge |x|$ 이고 $x^2+y^2 \le 1\}$

(e) $\displaystyle\oint_{C} \big(\sin(x^2) - 2y\big)dx + \big(x^3 + e^{y^2}\big)dy, \qquad C$는 타원 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

2 $\mathbb{R}^2$의 곡선 C가 아래 그림과 같이 주어졌다.



그린 정리를 이용하여 선적분 $\displaystyle\int_C y\cos x\,dx + x\sin y\,dy$ 의 값을 구하시오.

3 $\mathbb{R}^2$에서 매개변수곡선

$$C(t) = (1-t^2, t-t^3) \quad (-1 \le t \le 1)$$

로 둘러싸인 영역의 넓이를 그린 정리와 선적분의 정의를 이용하여 구하시오.

4 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x-4y+4 \le 0\}$이고

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2+y^2)\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$$

일 때, 선적분 $\displaystyle\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ 의 값을 구하시오. 여기에서 $\mathbf{n}$은 D의 경계 ∂D의 연속 단위 법선벡터장으로, D를 벗어나는 방향으로 주어졌다. (필요하면 평행이동과 이중적분의 관계를 사용하시오. 13.5 절)

1 $D = [0,1] \times [1,2] \times [1,3] \subset \mathbb{R}^3$ 이고 $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy,\, yz,\, xz)$일 때 $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$의 값을 구하시오. 여기에서 $\mathbf{n}$은 D의 경계 ∂D의 외향(outward) 단위법선벡터장이다. 즉, $\mathbf{n}$은 D를 벗어나는 방향으로 주어졌다.

2 영역 $D \subset \mathbb{R}^3$는 포물면 $z = 4 - x^2 - y^2$의 아래쪽과 평면 $z = 0$의 위쪽에 놓인 유계 영역이다. 곡면 ∂D를 통한 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2x + e^y \cos z,\ 3y + z \sinh x,\ z + e^y \ln(x^2+1)\big)$$

의 유량(flux) $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$의 값을 구하시오. 여기에서 ∂D의 단위법선벡터장은 외향이다.

3 15.4절 공통과제 3번 문제의 풀이를 발산정리를 이용하여 제시하시오.

4 $\mathbf{F}(x,y,z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 이고

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

일 때, 면적분 $\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$의 값을 구하시오. 여기에서 $\mathbf{n}$은 ∂D의 외향 단위법선벡터장이다.

5 두 곡면 S_1, S_2와 각 곡면에서 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 다음과 같이 주어졌다.

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\quad z \ge 1\}, \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \ge 0,$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\quad 0 \le z \le 1\}, \qquad \mathbf{n}(x,y,z) \cdot (x,y,0) > 0.$$

벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y(e^z - 1),\, xz,\, x^2 + 2z)$$

에 대해 면적분 $\iint_{S_1 \cup S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$의 값을 발산정리를 이용하여 구하시오.

6 $\mathbb{R}^3$에서 S는 원점 $(0,0,0)$을 내부에 포함하는 유계 영역의 경계로, 모든 점에서 접평면이 존재하는 정칙곡면이다. 벡터장 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$가

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,\, y,\, z)$$

로 주어졌을 때, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$의 값을 구하시오. 여기에서 $\mathbf{n}$은 S의 외향 단위법선벡터장이다.

1 벡터장 $\mathbf{F}$ 와 곡면 S 및 S 의 연속 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$ 의 방향이 각각 다음과 같이 주어졌을 때, 스토크스 정리를 사용하여 $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ 의 값을 구하시오.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,

S 는 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 중에서 xy 평면의 위쪽에 있는 부분이며, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$,

S 는 포물면 $z = x^2 + y^2$ 중에서 평면 $z = 1$ 의 아래쪽에 있는 부분이며, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$ 이다.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y + xz)\,\mathbf{i} + (2x + yz)\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$,

S 는 타원체면 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + (z-1)^2 = 2$ 중에서 xy 평면의 위쪽에 있는 부분이며, $\mathbf{n}$ 은 타원체 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + (z-1)^2 \leq 2$ 를 벗어나는 방향으로 주어졌다.

2 벡터장 $\mathbf{F}$ 와 곡선 C 및 C 의 향이 각각 다음과 같이 주어졌을 때 스토크스 정리를 사용하여

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \left(= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \right)$$

의 값을 구하시오. 여기에서 $\mathbf{T}$ 는 C 의 단위 접선벡터장이다.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$,

곡선 C 는 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$ 과 평면 $x + z = 1$ 의 교집합이며, 그 방향은 C 를 xy 평면에 내린 정사영이 양의 방향을 가지도록 주어졌다.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 2z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (x + 2y)\mathbf{k}$,

곡선 C 는 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 와 평면 $z = 1$ 의 교집합이며, 그 방향은 C 를 xy 평면에 내린 정사영이 양의 방향을 가지도록 주어졌다.

3 영역 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ 이고 } x + y + z \geq 1\}$와 두 곡면

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ 이고 } x + y + z \geq 1\},$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \text{ 이고 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

에 대해 $\partial D = S_1 \cup S_2$이다. 그리고 $\mathbf{n}$ 이 ∂D 의 외향 단위법선벡터장이라 하자.

(a) 벡터장 $\mathbf{F}$ 가 $\mathbb{R}^3$에서 C^1일 때, 스토크스 정리를 이용하여 $\iint_{\partial D} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ 임을 보이시오. 이를 이용하여 $\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ 임을 보이시오.

(b) 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 과 평면 $x + y + z = 1$ 의 교선 C 와 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$에 대해 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오. C 의 향은 C 를 xy 평면에 내린 정사영이 양의 방향을 가지도록 주어졌다.