공업수학 1 기말고사

2012년 6월 15일

(1) - (2) 다음 미분방정식의 해를 구하시오.

(1) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ (15)

[풀이] $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ 이라고 하면

$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m\, a_m x^{m-1}$, $y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$ 가 된다.

이것을 주어진 식에 대입하면

$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} m\, a_m x^m + 6\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$. 이

된다. 이 식을 다시 정리하면

$\sum_{s=0}^{\infty} (s+1)(s+2) a_{s+2} x^s - \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) a_s x^s - 2\sum_{s=1}^{\infty} s\, a_s x^s + 6\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s = 0$ 이 된다.

이 식을 다시 정리하면

$(6a_0 + 2a_2) + (4a_1 + 6a_3)x + \sum_{s=2}^{\infty}\{(s+1)(s+2)a_{s+2} - s(s-1)a_s - 2s\,a_s + 6a_s\}x^s = 0$

이 된다. 이 식으로부터

$a_2 = -3a_0$, $a_3 = -\frac{2}{3}a_1$, $a_{s+2} = \frac{(s+3)(s-2)}{(s+1)(s+2)}a_s$ 이 된다. 이 식으로부터

$a_4 = a_6 = a_8 = \cdots = a_{2n} = \cdots = 0$ $(n \ge 2)$ 이 된다.

그리고 $a_5 = -\frac{1}{5}a_1$, $a_7 = -\frac{4}{35}a_1$ 이므로

$$y = \left(a_0 - 3a_0x^2\right) + \left(a_1 - \frac{2}{3}a_1x^3 - \frac{1}{5}a_1x^5 - \frac{4}{35}a_1x^7 + \cdots\right)$$

$$= a_0\left(1 - 3x^2\right) + a_1\left(1 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{35}x^7 + \cdots\right)$$

이 된다.

(2) $x^2y'' + 6xy' + (x^2+6)y = 0$ (15)

[풀이] $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$, $(a_0 \neq 0)$ 이라고 하면

$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1}$, $y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2}$ 가 된다.

이것을 주어진 식에 대입하면

$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r} + 6\sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} + 6\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$

이 된다. 이 식을 다시 정리하면

$\sum_{s=0}^{\infty} (s+r)(s+r-1) a_s x^{s+r} + 6\sum_{s=0}^{\infty} (s+r) a_s x^{s+r} + \sum_{s=2}^{\infty} a_{s-2} x^{s+r} + 6\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^{s+r} = 0$

이 된다. 이 식을 다시 정리하면

$$(r^2+5r+6)a_0 x^r + (r^2+7r+12)a_1 x^{r+1} + \sum_{s=2}^{\infty}\{(s+r)(s+r+5)a_s + 6a_s + a_{s-2}\}x^{s+r} = 0$$

이 된다. 이 식을 다시 정리하면

$$(r+2)(r+3)a_0 x^r + (r+3)(r+4)a_1 x^{r+1} + \sum_{s=2}^{\infty}\{((s+r)(s+r+5)+6)a_s + a_{s-2}\}x^{s+r} = 0$$

이 된다. 따라서 첫 항에서 $r = -2, -3$ 이 된다.

(i) $r = -2$ 일 때 :

위 식에 $r = -2$ 를 대입하면

$2a_1 x^{r+1} + \sum_{s=2}^{\infty}\{((s-2)(s+3)+6)a_s + a_{s-2}\}x^{s-2} = 0$ 이 된다. 다시 정리하면

$2a_1 x^{r+1} + \sum_{s=2}^{\infty}\{s(s+1)a_s + a_{s-2}\}x^{s-2} = 0$ 이 된다. 따라서

$a_1 = 0, \quad a_s = -\dfrac{1}{s(s+1)}a_{s-2}$ 이 된다. 따라서

$a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2n+1} \cdots = 0$ 이 된다.

$a_2 = -\dfrac{1}{3!}a_0, \quad a_4 = \dfrac{1}{5!}a_0, \quad a_6 = -\dfrac{1}{7!}a_0, \ \cdots,$ 이므로

$$y = a_0 x^{-2}\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots\right)$$

$$= a_0 x^{-3}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) = a_0\frac{\sin x}{x^3}$$ 이 된다.

(ii) $r = -3$ 일 때 :

위 식에 $r = -3$ 를 대입하면

$\sum_{s=2}^{\infty}\{((s-3)(s+2)+6)a_s + a_{s-2}\}x^{s-2} = 0$ 이 된다. 다시 정리하면

$\sum_{s=2}^{\infty}\{s(s-1)a_s + a_{s-2}\}x^{s-2} = 0$ 이 된다. 따라서

$a_s = -\dfrac{1}{s(s-1)}a_{s-2}$ 이 된다.

$a_2 = -\dfrac{1}{2!}a_0, \quad a_3 = -\dfrac{1}{3!}a_1, \quad a = \dfrac{1}{4!}a_0, \ a_5 = \dfrac{1}{5!}a_1, \ a_6 = -\dfrac{1}{6!}a_0, \ \cdots,$ 이므로

$$y = a_0 x^{-3}\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right)$$

$$+ a_1 x^{-3}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right) = a_0\frac{\cos x}{x^3} + a_1\frac{\sin x}{x^3}$$ 이 된다.

a_0, a_1 은 임의의 상수 이므로 (1), 92)에 의해서

$$y = a_0\frac{\cos x}{x^3} + a_1\frac{\sin x}{x^3}$$ 이 된다.

(3) 다음 연립미분방정식의 특이점의 종류와 안정성(stable & attractive, stable, unstable)을 판별하시오. (10)

① $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} y_1' = -6y_1 + y_2 \\ y_2' = -9y_1 - 6y_2 \end{cases}$

[풀이] ① $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 이므로 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$라고 놓으면 다음의 식

$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = 0$ 으로부터

A 의 eigenvalue는 $3, -3$ 이 된다. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$ 이라고 하면,

$p = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $q = \lambda_1 \lambda_2 = -9 < 0$, $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 36 > 0$

이므로 특이점 $(0, 0)$ 은 unstable 이고 saddle point 가 된다.

② $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 이므로 $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$라고 놓으면 A 의 eigenvalue는 $-6+3i, -6-3i$ 가 된다. $\lambda_1 = -6+3i$, $\lambda_2 = -6-3i$ 라고 하면,

$p = \lambda_1 + \lambda_2 = -12$, $q = \lambda_1 \lambda_2 = 36 + 9 = 45$, $\Delta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = -81 < 0$

이므로 특이점 $(0, 0)$ 은 stable and attractive 이고 spiral 이 된다.

(4) 초기에 탱크 T_1 에는 소금 100 파운드가 녹아있는 소금물물 200 갤런이 들어있고, 탱크 T_2 에는 소금 200 파운드가 녹아있는 소금물 200 갤런이 들어있다고 하자. 아래 그림과 같은 펌프 시설이 설치되어 있다고 하자. 매 순간 소금물이 완벽하게 혼합된다고 가정하고 t 초 후에 탱크 T_1 에 있는 소금의 양 $y_1(t)$ 와 탱크 T_2 에 있는 소금의 양 $y_2(t)$ 를 구하시오. (15)

[풀이] t 초 후에 탱크 T_1 에 있는 소금의 양을 $y_1(t)$ 라고 하고 탱크 T_2 에 있는 소금의 양을 $y_2(t)$ 라고 하자. 그러면 다음의 식이 성립한다.

$$y_1{}'(t) = -\frac{16}{200}y_1(t) + \frac{4}{200}y_2(t) = -\frac{4}{50}y_1(t) + \frac{1}{50}y_2(t) \ , \ y_1(0) = 100$$

$$y_2{}'(t) = \frac{16}{200}y_1(t) - \frac{16}{200}y_2(t) = \frac{4}{50}y_1(t) - \frac{4}{50}y_2(t) \ , \ y_2(0) = 200$$ 이 된다.

이것을 행렬로 표현하면,

$\begin{pmatrix} y_1{}' \\ y_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{4}{50} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 이므로 $A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{4}{50} \end{pmatrix}$ 라고 놓으면

다음의 식

$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\frac{4}{50} - \lambda & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{4}{50} - \lambda \end{pmatrix} = (-\frac{4}{50} - \lambda)^2 - \frac{4}{2500} = 0$ 으로부터 A 의 eigenvalue는 $\lambda_1 = -\frac{3}{25}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$ 가 된다.

① $\lambda_1 = -\frac{3}{25}$ 일 때 eigenvector를 구해보면,

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{50} - (-\frac{3}{25}) & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{4}{50} - (-\frac{3}{25}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} \frac{2}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & \frac{2}{50} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 으로부터 $2a + b = 0$ 을 얻는다. 즉, $b = -2a$ 이므로

eigenvector는 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 가 된다.

② 같은 방법으로 $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$ 일 때 eigenvector를 구해보면, eigenvector는 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 가 된다. 따라서 이 연립미분방정식의 일반해는

$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{3}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{25}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 이 된다. 이 식을 풀어쓰면

$y_1(t) = c_1 e^{-\frac{3}{25}t} + c_2 e^{-\frac{1}{25}t}$, $y_2(t) = -2c_1 e^{-\frac{3}{25}t} + 2c_2 e^{-\frac{1}{25}t}$ 가 된다. 초기조건은 $y_1(0) = 100$, $y_2(0) = 200$ 이므로

$c_1 + c_2 = 100$, $-2c_1 + 2c_2 = 200$ 이 된다. 이 연립방정식을 풀면, $c_1 = 0$, $c_2 = 100$

이 된다. 따라서 $y_1(t) = 100\, e^{-\frac{1}{25}t}$, $y_2(t) = 200\, e^{-\frac{1}{25}t}$ 이 된다.

(5) 다음 적분값 $\int_1^2 x^3 J_0(x)\,dx$ 을 $J_0(x)$ 와 $J_1(x)$ 의 $x=1$ 과 $x=2$ 에서의 함숫값을 사용하여 나타내시오. (10)

[풀이] 공식 $\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\,dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + C$ 을 사용하면,

$\int x J_0(x)\,dx = x J_1(x) + C$, $\int x^2 J_1(x)\,dx = x^2 J_2(x) + C$ 가 된다. 따라서 부분적분을 사용하면

$$\int_1^2 x^3 J_0(x)\,dx = \int_1^2 x^2\, x J_0(x)\,dx = \left[x^2 x J_1(x)\right]_1^2 - \int_1^2 2x\, x\, J_1(x)\,dx$$

$$= 8J_1(2) - J_1(1) - 2\int_1^2 x^2 J_1(x)\,dx = 8J_1(2) - J_1(1) - 2\left[x^2 J_2(x)\right]_1^2$$

$$= 8J_1(2) - J_1(1) - 8J_2(2) + 2J_2(1)$$ 이 된다.

다시 공식 $J_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x)$ 을 사용하면

$J_2(x) = \dfrac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$ 가 된다. 따라서

$J_2(2) = J_1(2) - J_0(2)$, $J_2(1) = 2J_1(1) - J_0(1)$ 이므로 이 식을 이용하면,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^3 J_0(x)\,dx &= 8J_1(2) - J_1(1) - 8J_2(2) + 2J_2(1)\\ &= 8J_1(2) - J_1(1) - 8\left(J_1(2) - J_0(2)\right) + 2\left(2J_1(1) - J_0(1)\right)\\ &= 3J_1(1) + 8J_0(2) - 2J_0(1)\end{aligned}$$

이 된다.

(6) 다음 방정식 $x^2y'' + xy' + (4x^4 - \frac{1}{3})y = 0$ 을 $x^2 = z$ 로 치환하여 풀어라. 참고로 ν 가 정수가 아닐 때, Bessel 방정식 $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ 의 일차독립인 두 해는 $J_\nu(x)$ 와 $J_{-\nu}(x)$ 이다. (10)

[풀이] $x^2 = z$ 로 놓으면 $x = \sqrt{z}$ 이므로 주어진 식은

$zy''(\sqrt{z}) + \sqrt{z}\, y'(\sqrt{z}) + (4z^2 - \frac{1}{3})y(\sqrt{z}) = 0$ -----(1) 가 된다.

$Y(z) = y(\sqrt{z})$ 라고 놓으면,

$$Y'(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} y'(z^{\frac{1}{2}}),$$

$$Y''(z) = -\frac{1}{4} z^{-\frac{3}{2}} y'(z^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} z^{-1} y''(z^{\frac{1}{2}})$$

이 된다. 이 식을 (1) 식에 대입하면

$4z^2 Y''(z) + 4zY'(z) + (4z^2 - \frac{1}{3}) Y(z) = 0$ 이 된다. 양변을 4 로 나누면

$z^2 Y''(z) + zY'(z) + (z^2 - \frac{1}{12}) Y(z) = 0$ 가 된다. 이것은 $\nu = \frac{1}{\sqrt{12}}$ 인 경우의 Bessel 방정식이므로 이 방정식의 해는

$Y(z) = c_1 J_{\frac{1}{\sqrt{12}}}(z) + c_2 J_{-\frac{1}{\sqrt{12}}}(z)$ 이 된다.

다시 $Y(z) = y(\sqrt{z})$ 로부터 $y(z) = Y(z^2)$ 이므로

$y(z) = Y(z^2) = c_1 J_{\frac{1}{\sqrt{12}}}(z^2) + c_2 J_{-\frac{1}{\sqrt{12}}}(z^2)$ 이 된다. 변수를 x 로 바꾸면

$y(x) = c_1 J_{\frac{1}{\sqrt{12}}}(x^2) + c_2 J_{-\frac{1}{\sqrt{12}}}(x^2)$ 이 된다.

(7) - (8) 다음 미분방정식의 해를 구하시오.

(7) $y'' + 2y' + 10y = \delta(t-2)$, $y(0) = y'(0) = 0$ (10)

[풀이] 주어진 방정식을 Laplace Transform을 하면

$(s^2 + 2s + 10)\,Y(s) = e^{-2s}$ 가 된다. 따라서 $Y(s) = \dfrac{e^{-2s}}{(s+1)^2+3^2}$ 이 된다.

$$L\left\{\frac{1}{3}\,e^{-t}\sin 3t\right\} = \frac{1}{(\mathrm{s}+1)^2+3^2}$$ 이므로

$$y(t) = \frac{1}{3}\,e^{-(t-2)}\sin 3(t-2)\,u(t-2)$$

$$= \begin{cases} 0 & t<2 \\ \dfrac{1}{3}\,e^{-(t-2)}\sin(3t-6) & t>2 \end{cases}$$ 이 된다.

(8) $y'' + 5y' + 6y = u(t-1) + \delta(t-2)$, $y(0) = y'(0) = 0$ (10)

[풀이] 주어진 식을 Laplace Transform을 하면

$(s^2 + 5s + 6)\,Y(s) = \dfrac{e^{-s}}{s} + e^{-2s}$ 이 된다. 즉,

$(s+2)(s+3)\,Y(s) = \dfrac{e^{-s}}{s} + e^{-2s}$ 이 된다. 따라서

$Y(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s+2)(s+3)} + \dfrac{e^{-2s}}{(s+2)(s+3)}$ 이 된다. 이 식을 부분분수로 분해하면

$Y(s) = \left(\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s+3}\right)e^{-s} + \left(\dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+3}\right)e^{-2s}$ 이 된다. 따라서

$$y(t) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{3}e^{-3(t-1)}\right)u(t-1) + \left(e^{-2(t-2)} - e^{-3(t-2)}\right)u(t-2)$$

$$= \begin{cases} 0 & t<1 \\ \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}e^{-2(t-1)} + \dfrac{1}{3}e^{-3(t-1)} & 1<t<2 \\ \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}e^{-2(t-1)} + \dfrac{1}{3}e^{-3(t-1)} + e^{-2(t-2)} - e^{-3(t-2)} & t>2 \end{cases}$$

이 된다.

(9) 다음 연립방정식의 해를 구하시오. (15)

$$\begin{cases} y_1{}' = -y_2 + 1 - u(t-1) \\ y_2{}' = y_1 + 1 - u(t-1) \end{cases}, \qquad y_1(0) = 0\,,\ y_2(0) = 0\,.$$

[풀이] 주어진 연립방정식을 Laplace Transform을 하면

$$\begin{cases} sY_1 = -Y_2 + \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s} \\ sY_2 = Y_1 + \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s} \end{cases}$$

이 된다. 이 식을 다시 정리하면

$$\begin{cases} sY_1 + Y_2 = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s} \\ -Y_1 + sY_2 = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s} \end{cases}$$

이 된다.

이 연립방정식을 풀어서 Y_1, Y_2 를 구하면

$$Y_2(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s^2+1} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{e^{-s}}{s^2+1} - \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-s}$$

이 된다.

따라서

$$y_2(t) = \sin t + 1 - \cos t - (1 - \cos(t-1))\,u(t-1) - \sin(t-1)u(t-1)$$

가 된다. 다시 위 연립방정식에서 $Y_1(s)$ 를 구하면

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{s^2+1} + \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{e^{-s}}{s^2+1} + \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-s}$$

이 된다.

따라서

$$y_1(t) = \sin t - 1 + \cos t + (1 - \cos(t-1))\,u(t-1) - \sin(t-1)u(t-1)$$

이 된다. 이것을 정리하면

$$y_1(t) = \begin{cases} -1 + \sin t - \cos t & t < 1 \\ \sin t - \cos t - \sin(t-1) - \cos(t-1) & t > 1 \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 1 + \sin t - \cos t & t < 1 \\ \sin t - \cos t - \sin(t-1) + \cos(t-1) & t > 1 \end{cases}$$

이 된다.

(10) 다음 RFC-회로에서 $R = 2\Omega$, $C = 0.5F$, $L = 1H$ 이다. 외부의 전압 $v(t)$ 를 $v(t) = \begin{cases} 1V & if \quad 0 < t < 2 \\ 0 & if \quad t > 2 \end{cases}$ 으로 주었을 때, t 초 후의 전류 $I(t)$ 를 구하시오. 단, $I(0) = 0$ 으로 한다. (15)

[풀이] RFC-회로에 대한 기본 공식을 사용하면

$RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt + LI'(t) = v(t)$ 이 된다. $R = 2\Omega$, $C = 0.5F$, $L = 1H$ 이고 $v(t) = u(t) - u(t-2)$ 이므로

$2I(t) + 2\int I(t)\,dt + I'(t) = u(t) - u(t-2)$ 가 된다. $I(t)$ 의 Laplace Transform을 $Y(s)$ 라고 하면,

$2Y(s) + 2\frac{1}{s}Y(s) + sY(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$ 이 된다. 이 식을 정리하면

$\frac{s^2+2s+2}{s}Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$ 이 된다. 따라서

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} - \frac{e^{-2s}}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2+1} - \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2+1}$$

이 된다. $e^{-t}\sin t$ 를 Laplace Transform을 하면 $\frac{1}{(s+1)^2+1}$ 이 되므로

$$y(t) = e^{-t}\sin t - e^{-(t-2)}\sin(t-2)\,u(t-2)$$

$$= \begin{cases} e^{-t}\sin t & 0 < t < 2 \\ e^{-t}\sin t - e^{-(t-2)}\sin(t-2) & t > 2 \end{cases}$$

가 된다.