공업수학 1 중간고사

2012년 4월 21일

(1) - (6) 다음 미분방정식의 해를 구하시오. (각 문항 당 10점)

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{x-y}}{1+e^x}$, $y(0) = \ln(\ln 2+1)$

[풀이] $e^y\,dy = \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$, $e^y = \ln(1+e^x) + C$, $y = \ln(\ln(1+e^x) + C)$,

$y(0) = \ln 2+1$ 로부터 $\ln(\ln(1+1) + C) = \ln(\ln 2+1)$ 이고 $C = 1$.

따라서 $y = \ln(\ln(1+e^x) + 1)$.

(2) $(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)\,dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)\,dy = 0$, $y(0) = 2$

[풀이] $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)\,dx = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xye^{xy^2} - 3y^2)\,dy$ 이므로 이 미분방정식은 exact 미분방정식이고 이 방정식의 해는 $f(x,y) = C$ 의 형태가 된다. 따라서 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (y^2 e^{xy^2} + 4x^3)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = (2xye^{xy^2} - 3y^2)$ 인 $f(x,y)$ 를 찾아야 한다. 첫 번째 식으로부터 $f(x,y) = e^{xy^2} + x^4 + g(y)$ 가 되고 이 식을 다시 y 로 편미분하면 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + g'(x) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$ 이 된다. 따라서 $g'(x) = -3y^2$ 이고 이로부터 $g(x) = -y^3$ 이므로 $f(x,y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3$ 이 된다. 따라서 위 미분방정식의 일반해는 $f(x,y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3 = C$ 가 된다. 초기조건 $y(0) = 2$ 를 사용하면 $C = -7$ 임을 알 수 있다. 따라서 위 미분방정식의 해는 $f(x,y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3 = -7$ 이 된다.

(3) $xy' = y + 3x^4\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $(x > 0)$, $y(1) = \dfrac{\pi}{3}$

[풀이] $y' = \dfrac{y}{x} + 3x^3\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$. $\dfrac{y}{x} = u$ 라고 놓으면 $y = xu$ 이고 $y' = u + xu'$ 이 된다. 이것을 위 식에 대입하면 $u' = 3x^2\cos^2 u$ 가 된다. 즉,

$\dfrac{du}{dx} = 3x^2\cos^2 u$ 이고 $\dfrac{1}{\cos^2 u}du = 3x^2\,dx$ 이므로 양변을 적분하면 $\tan u = x^3 + C$ 가 된다. 그리고 $\dfrac{y}{x} = u$ 이므로 $\tan\dfrac{y}{x} = x^3 + C$ 가 된다. 초기조건 $y(1) = \dfrac{\pi}{3}$ 을 사용하면 $C = \sqrt{3} - 1$ 이 된다. 따라서 위 미분방정식의 해는

$\tan\dfrac{y}{x} = x^3 + \sqrt{3} - 1$ 이 된다.

(4) $y' + 2xy = -xy^4$, $y(0) = 1$

[풀이] $y^{1-a} = y^{-3} = u$ 라고 놓으면 $u' = -3y^{-4}y'$ 이 된다. 이것을 원래의 식에 대입하면 $u' - 6xu = 3x$ 가 된다. 이 방정식을 풀기 위해 양변에 e^{-3x^2} 을 곱하면 $e^{-3x^2}u' - 6xe^{-3x^2}u = 3x\,e^{-3x^2}$ 이 된다. 따라서 $\dfrac{d}{dx}(e^{-3x^2}u) = 3x\,e^{-3x^2}$ 이 된다. 양변을 적분하면 $e^{-3x^2}u = -\dfrac{1}{2}e^{-3x^2} + C$ 가 되고, $u = -\dfrac{1}{2} + Ce^{3x^2}$ 이 된다. 즉, $y^{-3} = -\dfrac{1}{2} + Ce^{3x^2}$ 이므로 $y = \left(\dfrac{1}{-\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 이 된다. 초기조건

$y(0) = 1$ 로부터 $C = \dfrac{3}{2}$ 이므로 위 미분방정식의 해는 $y = \left(\dfrac{2}{3e^{3x^2} - 1}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 이 된다.

(5) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos^3 x}$

[풀이] ① homogeneous solution : 특성방정식이 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ 이므로 $\lambda = 1 \pm i$ 이다. 따라서 homogeneoue solution y_h 는

$y_h = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x$ 가 된다.

② $y_1 = e^{-x}\cos x$, $y_2 = e^{-x}\sin x$ 라고 놓고 Wronskian $W = W(y_1, y_2)$ 를 계산하면 $W = e^{-2x}$ 가 된다.

③ 특수해를 $y_p = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$ 라고 놓으면, $r(x) = \dfrac{e^{-x}}{\cos^3 x}$ 이므로

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2(x)\,r(x)}{W}\,dx = \int \frac{-e^{-x}\sin x\,\dfrac{e^{-x}}{\cos^3 x}}{e^{-2x}}\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x} \quad ,$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)\,r(x)}{W}\,dx = \int \frac{-e^{-x}\cos x\,\dfrac{e^{-x}}{\cos^3 x}}{e^{-2x}}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sec^2 x\,dx = \tan x$$

가 된다. 따라서

$y_p = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2 x}e^{-x}\cos x + \dfrac{\sin x}{\cos x}e^{-x}\sin x = \dfrac{2\sin^2 x - 1}{2\cos x}e^{-x}$ 가 된다

④ 일반해는

$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x + \dfrac{2\sin^2 x - 1}{2\cos x}e^{-x}$ 이 된다.

(6) $y''' + 2y'' + 4y' + 8y = e^{-3x} + 8x^2$

[풀이] ① homogeneous solution : 특성방정식이

$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda^2+4) = 0$ 이므로 $\lambda = -2,\ \pm 2i$ 이다. 따라서

homogeneoue solution y_h 는 $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x$ 가 된다.

② 특수해를 $y_p = Ae^{-3x} + Bx^2 + Cx + D$ 라고 놓고 원래의 식에 대입하면

$$y_p''' + 2y_p'' + 4y_p' + 8y_p = -13Ae^{-3x} + 8Bx^2 + 8(B+C)x + (4B+4C+8D)$$
$$= e^{-3x} + 8x^2$$

이 된다. 이로부터 $A = -\dfrac{1}{13}$, $B = 1$, $C = -1$, $D = 0$ 이 된다. 따라서

$y_p = -\dfrac{1}{13}e^{-3x} + x^2 - x$ 이 된다.

③ 일반해는

$y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + -\dfrac{1}{13}e^{-3x} + x^2 - x$ 이 된다.

(7) “Reduction of order” 방법을 사용하여 다음 방정식의 한 해가 $y_1 = e^x$ 일 때
$2xy'' + (1-4x)y' + (2x-1)y = 0$ 의 일반해를 구하시오 (10).

[풀이] $y_1 = e^x$ 이고 $y_2 = e^x u(x)$ 라고 하면
$y_2' = e^x u'(x) + u(x)$, $y_2'' = e^x u''(x) + 2e^x u'(x) + e^x u(x)$ 가 된다. 이것을 원래의 식에 대입하면
$2x\,(e^x u''(x) + 2e^x u'(x) + e^x u(x)\,) + (1-4x)\,(e^x u'(x) + u(x)\,) + (2x-1)e^x u(x) = 0$
이 된다. 이것을 정리하면
$2x\,u'' + u' = 0$ 이 된다. 즉, $u'' + \frac{1}{2x} u' = 0$ 된다. 양변에 $\sqrt{x}$ 을 곱하면

$\sqrt{x}\,u'' + \frac{1}{2\sqrt{x}} u' = 0$ 이 되고, 이것은 $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\,u') = 0$ 으로 쓸 수 있다.

따라서 $u'(x) = Cx^{-\frac{1}{2}}$ 이고 $u(x) = 2Cx^{\frac{1}{2}} = \tilde{C}\sqrt{x}$ 가 된다. 더 간단하게 $u(x) = \sqrt{x}$ 로 잡으면 되고, 이로부터 $y_2 = e^x\sqrt{x}$ 이 된다. 따라서 위 미분방정식의 일반해는 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2\sqrt{x}\,e^x$ 가 된다.

(8) e^x, $\cos 3x$, $\sin 3x$ 의 Wronskian을 구하시오 (10).

[풀이] Wronskian $W = \begin{vmatrix} e^x & \cos 3x & \sin 3x \\ e^x & -3\sin 3x & 3\cos 3x \\ e^x & -9\cos 3x & -9\sin 3x \end{vmatrix}$

$= e^x \begin{vmatrix} -3\sin 3x & 3\cos 3x \\ -9\cos 3x & -9\sin 3x \end{vmatrix} - e^x \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -9\cos 3x & -9\sin 3x \end{vmatrix}$

$+ e^x \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 30e^x$

가 된다.

(9) 무게($N = mg$)가 $19.6\,N$인 추가 천장에 고정된 용수철에 아래 그림과 같이 매달려 있다고 하자. 평형상태에서 이 용수철을 $3\,N$의 힘으로 잡아당겼더니 $25\,cm$가 늘어났다고 하자. 이 용수철의 마찰계수는 $c = 4$이고 외부에서 가해지는 힘이 $E(t) = 2\sin 2t + 4\cos 2t$ 라고 하자. 이 용수철을 아래로 $1\,m$ 잡아당겼다가 살며시 놓았을 때 이 용수철의 운동을 기술하시오 (15).

① 위의 상황에 맞는 미분방정식을 구하시오.

② 방정식을 풀어서 용수철의 운동을 기술하시오.

[풀이] ① $mg = 19.6$ 이므로 질량 $m = \dfrac{19.6}{g} = \dfrac{19.6}{9.8} = 2\,(\mathrm{kg})$ 이 된다.

다음으로 Hook의 법칙 $F = ky$ 로부터 $3(N) = \dfrac{1}{4}(m) \times k$ 가 된다. 따라서 용수철 상수는 $k = 12$ 가 된다. 그리고 마찰계수는 $c = 4$ 이므로 다음과 같이
미분방정식을 세울 수 있다.

$F_{restoring} = -ky = -12y$ (복원력은 항상 늘어난 방향에 반대로 작용)

$F_{damp} = -cy' = -4y'$ (마찰력은 항상 속도에 반대로 작용)

$F_{external} = E(t) = 2\sin 2t + 4\cos 2t$ (외부에서 작용하는 힘)

$$F_{total} = ma = my'' = 2y'' = F_{restoring} + F_{damp} + F_{external}$$

이것을 정리하면

$2y'' = -12y - 4y' + 2\sin 2t + 4\cos 2t$ 이 된다.

즉,

$y'' + 2y' + 6y = \sin 2t + 2\cos 2t$ 이 된다.

② homogeneous solution : 특성방정식이 $\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$ 이므로
$\lambda = -1 \pm \sqrt{5}\,i$ 이다. 따라서 homogeneoue solution y_h 는
$y_h = c_1 e^{-t}\cos\sqrt{5}t + c_2 e^{-t}\sin\sqrt{5}t$ 가 된다.

③ 특수해를 $y_p = A\cos 2t + B\sin 2t$ 라고 놓고 원래의 식에 대입하면

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' + 6y_p &= (2A + 4B)\cos 2t + (-4A + 2B)\sin 2t \\ &= \sin 2t + 2\cos 2t \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $2A + 4B = 2$, $-4A + 2B = 1$ 가 된다. 연립방정식을 풀면
$A = 0$, $B = -\dfrac{1}{2}$ 가 되고 특수해는 $y_p = -\dfrac{1}{2}\sin 2t$ 가 된다.

위 방정식의 일반해는

$y = y_h + y_p = c_1 e^{-t}\cos\sqrt{5}t + c_2 e^{-t}\sin\sqrt{5}t - \dfrac{1}{2}\sin 2t$ 가 된다.

문제의 조건에서 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ 이므로 $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ 이 된다.
마지막으로 위 방정식의 해는

$$y = e^{-t}\cos\sqrt{5}t - \frac{1}{2}\sin 2t$$

가 된다.

(10) $R = 20\Omega$, $L = 10H$ (Henry), $C = 0.025F$(Farad)인 RLC 회로가 아래 그림과 같이 주어졌다고 하자. 외부 전위가 $E(t) = 200\sin t$ 으로 주어질 때 시간 t 에서의 전류 $I(t)$ 를 구하시오. 단, $I(0) = I'(0) = 0$ 이다 (15).

① 위의 상황에 맞는 미분방정식을 구하시오.
② 방정식을 풀어서 전류 $I(t)$ 를 구하시오.

[풀이] ① 각각의 전위차는 $V_R = RI(t) = 20I(t)$, $V_L = LI'(t) = 10I'(t)$, $V_C = \frac{1}{C}Q(t) = \frac{1}{0.025}Q(t) = 40Q(t)$ 이므로 전체의 전위차는
$20I(t) + 10I'(t) + 40Q(t) = 200\sin t$ 이 된다. 양변을 미분하면
$20I'(t) + 10I''(t) + 40I(t) = 200\cos t$ 이 된다. 이 식을 정리하면
$I''(t) + 2I'(t) + 4I(t) = 20\cos t$ 이 된다.
② homogeneous solution : 특성방정식이 $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$ 이므로
$\lambda = -1 \pm \sqrt{3}i$ 이다. 따라서 homogeneoue solution $I_h(t)$ 는
$I_h(t) = c_1 e^{-t}\cos\sqrt{3}t + c_2 e^{-t}\sin\sqrt{3}t$ 가 된다.
③ 특수해를 $I_p(t) = A\cos t + B\sin t$ 라고 놓고 원래의 식에 대입하면

$$I_p'' + 2I_p' + 4I_p = (3A + 2B)\cos t + (-2A + 3B)\sin t = 20\cos t$$

가 된다. 따라서 $3A + 2B = 20$, $-2A + 3B = 0$ 가 된다. 연립방정식을 풀면
$A = \frac{60}{13}$, $B = \frac{40}{13}$ 이 되고 특수해는 $I_p = \frac{60}{13}\cos t + \frac{40}{13}\sin t$ 가 된다.
위 방정식의 일반해는

$$I(t) = I_h + I_p = c_1 e^{-t}\cos\sqrt{3}t + c_2 e^{-t}\sin\sqrt{3}t + \frac{60}{13}\cos t + \frac{40}{13}\sin t$$

가 된다.
문제의 조건에서 $I(0) = 0$, $I'(0) = 0$ 이므로 $c_1 = -\frac{60}{13}$, $c_2 = -\frac{100}{13\sqrt{13}}$ 이 된다. 마지막으로 위 방정식의 해는

$$I(t) = -\frac{60}{13}e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \frac{100}{13\sqrt{13}}e^{-t}\sin\sqrt{3}t + \frac{60}{13}\cos t + \frac{40}{13}\sin t$$

가 된다.

(11) 온도가 $20^\circ C$ 인 금속막대를 끓는 물속에 넣었더니 1분 후에 $60^\circ C$ 가 되었다. 뉴튼의 냉각법칙에 의하면 금속막대의 온도변화는 끓는 물과 금속막대의 온도차에 비례한다. (15)

① t 분 후의 금속막대의 온도 $y(t)$ 를 구하시오.
② 이 금속막대의 온도가 $90^\circ C$가 되는 시간을 구하시오.

[풀이] ① 문제의 조건으로부터 $y'(t) = k(100 - y(t))$ 가 된다. 다시 쓰면 $\dfrac{dy}{dt} = k(100 - y(t))$ 이 되고 $\dfrac{dy}{(100 - y(t))} = k\,dt$ 가 된다. 이 방정식을 풀면

$-\ln(100 - y) = kt + \tilde{C}$, $\ln(100 - y) = -kt - \tilde{C}$,

$100 - y = e^{-kt - \tilde{C}} = e^{-\tilde{C}}e^{-kt} = Ce^{-kt}$ 가 된다. 따라서

$$y(t) = 100 - Ce^{-kt}$$

가 된다. $y(0) = 20$ 이므로 $C = 80$ 이 된다. 따라서 $y(t) = 100 - 80\,e^{-kt}$.
또한, $y(1) = 60$ 이므로 $k = \ln 2$ 가 된다. 따라서

$y(t) = 100 - 80\,e^{-(\ln 2)t} = 100 - 80e^{\ln 2^{-t}} = 100 - 80 \cdot 2^{-t}$

가 된다.
② $y(t) = 90$ 이 되는 사간을 구하기 위해서, $y(t) = 100 - 80 \cdot 2^{-t} = 90$ 을 풀면 $2^{-t} = \dfrac{1}{8}$ 이 된다. 따라서 $t = 3$ 이 된다. 즉, 3 분 후에 금속막대의 온도는 $90^\circ C$가 된다.